Aproximaciones del factor de fricción obtenidas por solución numérica de la ecuación de Colebrook

IC

Por: Hernando Ramírez Plazas*

Para diseños preliminares de gasoductos y estudios de optimización, las proximaciones explicitas del factor de fricción obtenidas por solución numerica de la ecuación de Colebrook, son más exactas y más fáciles de usar que las ecuaciones comúnmente utilizadas para el cálculo directo de f, las cuales no requieren solución por ensayo y error. La mejor de todas las aproximaciones es la Ecuación de Serghides.

La ecuación (1) es la forma más general que se aplica al flujo de gas natural por tuberia horizontal

$$q^h = \frac{C\,(Tb/Pb)\,(P_1^{\,2} - P_2^{\,2})^{0.5}\,d^{2.5}}{(f.\,r_g.\,T.Z.L.)^{0.5}} \qquad (1)$$

donde

q^h= Flujo de gas por tuberia horizontal, pie³ standard por dia
P= Presión, Lpca (Subindice b = Presión base)
T= Temperatura, R (Subindice b = Temperatura base)
d= Diámetro de la tuberia, pulgada

* Profesor titular. Departamento de Ingenieria de Petróleos. Universidad Surcolombiana.

L= Longitud de la tubería, milla
C= 77,54 (constante especifica para las unidades usadas)
f= Factor de fricción de ***Moody***
Z= Factor de compresibilidad (adimensional; valor promedio)
rg= Gravedad especifica (adimensional)

En ella, el factor de fricción de Moody (f) es una función considerablemente ***no lineal*** del Número de Reynolds (N_{Re}) y de la rugosidad relativa (e/D), que debe ser leído de una gráfica o determinado iterativamente de la ecuación (2) ***conocida con el nombre de ecuación de Colebrook.***

$$\frac{1}{(f)^{0.5}} = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{N_{Re}\,(f)^{0.5}} \right) \qquad (2)$$

donde e es la rugosidad absoluta de la tubería (pie); D, es el diámetro interno de la tubería (pie), y N_{Re} el número de Reynolds (adimensional).

$$N_{Re} = 0.7105\, P_b\, r_g\, q_h \,/\, (T_b\, u_g\, d) \qquad (3)$$

En la ecuación (3), u_g, es la viscosidad del gas (valor promedio) y además, el N_{Re} es función de q_h

Conviene aclarar que la ecuación de Colebrook es la base para predecir el factor de fricción para flujo de fluidos por tubería, pero no se puede resolver directamente porque f aparece en ambos lados de la ecuación (2). La solución se obtiene aplicando una ***técnica de ensayo y error***. Ahora bien, si se quiere obtener directamente el valor del factor de fricción, se debe utilizar una ecuación aproximada que sea explícita en f, logrando de esta manera simplificar la solución de la ecuación (1).

Recordemos que el factor de fricción es una de las variables que más influye en la exactitud con que se estime el flujo de gas natural a traves de tuberías horizontales. En este sentido, resultan particularmente importantes las ecuaciones aproximadas para el cálculo directo de f, y dentro de este grupo, las que están basadas en la ***solución numérica de la ecuación de Colebrook,*** las cuales parecen ser más exactas que cualesquiera de las otras aproximaciones publicadas (Moody, Wood, Jain, Churchill y Chen). Sin embargo, la exactitud mejora con el número de constantes (A; A y B; A, B y C) para las cuatro ecuaciones más ampliamente conocidas de la serie de soluciones numéricas de Colebrook. (Vease Cuadro No. 1)

El factor de fricción de Moody

Durante el flujo de gas natural por tuberias siempre resulta que alguna parte de la energía mecánica es convertida en calor. Esta ***"Energía Perdida"*** se debe a irreversibilidades de la corriente fluyente, las cuales consisten principalmente en ***pérdidas por fricción*** (por efectos viscosos y por causa de la rugosidad de la pared interna de la tuberia).

Con excepción del flujo completamente ***laminar,*** la energía perdida en sistemas reales no puede ser predicha teóricamente; por el contrario, debe ser determinada a partir de experimentos y luego correlacionada como una función de las variables de flujo. ***Las pérdidas por fricción*** son generalmente calculadas usando un ***factor de fricción,*** f, que por análisis dimensional se ha encontrado que depende del número de Reynolds (N_{Re}) y de la rugosidad relativa (e/D).

La base teórica para la ecuación general de flujo de gas natural por tubería es la ley de la "Conservación de la Energía". Luego, aplicando relaciones termodinámicas para la energía interna, la entalpia y la entropia es modificada a la forma de **gradiente de presión** ($\Delta P / \Delta L$).

El flujo horizontal, la energía pérdida o caida de presión total es causada únicamente por cambios en energía cinética y por pérdida por fricción, así:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_t = \left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_{EC} + \left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_f$$

El factor de fricción de Fanning, f, se define como la razón del esfuerzo de corte de pared (tw) a la energía cinética por unidad de volumen (DEN. v^2/ 2gc), es decir

$$f = \frac{\text{Esfuerzo de corte de pared}}{\text{Energía cinética por unidad de volumen}}$$

$$f = \frac{tw}{DEN.\ v^2/2gc} \qquad (4)$$

También,

$$tw = \left(\frac{d}{4}\right)\left(\frac{dP}{dL}\right)_f \qquad (5)$$

Donde $\left(\frac{dP}{dL}\right)_f$ son las perdidas por fricción expresadas en términos de gradiente de presión.

Sustituyendo la ec. (5) en la ec. (4) y despejando $\left(\frac{dP}{dL}\right)_f$ se obtiene

$$\left(\frac{dP}{dL}\right)_f = \frac{2f' \, DEN. \, v^2}{g_c \, D} \qquad (6)$$

La ec. (6) se denomina Ecuación de Fanning.

En términos del factor de fricción de Moody o de Darcy - Weisbach (f=4f'), las pérdidas por fricción son iguales a:

$$\left(\frac{dP}{dL}\right)_f = \frac{f \, DEN. \, v^2}{2gc \, D} \qquad (7)$$

Siendo DEN la densidad del gas natural y v la velocidad en la tubería.

La ec. (7) se conoce con el nombre de **ecuación de Moody** y f se ***define como el factor de fricción de Moody***.

Este factor se representa en una gráfica de (log. f) Vs. (log N_{Re}), parametrizada en (e/D), la cual se denomina "Gráfica del factor de fricción de Moody" y corresponde a la expresión analítica de la ec. (2).

Número de Reynolds (N_{Re})

Es un grupo adimensional definido como:

$$N_{Re} = \frac{D\,(pie)\;.\;v\,(pie/seg)\;.\;DEN\left(\dfrac{lbm}{Pie^{3}}\right)}{U\left(\dfrac{lbm}{Pie - seg}\right)}$$

El número de Reynolds (N_{Re}) es la razón de las fuerzas del momento del fluido a las fuerzas de corte viscoso, y se usa como parámetro para diferenciar el flujo ***laminar*** del turbulento. Generalmente se acepta que el cambio de flujo laminar a turbulento ocurre a un N_{Re} de 2100 para flujo en tubería. Para propósitos prácticos de flujo de gas natural, el N_{Re} se calcula por medio de la ec. (3)

Rugosidad Relativa (e/D)

Normalmente, la pared interna de una tubería no es lisa sino rugosa. La rugosidad es función del material de la tubería, del método de fabricación y del ambiente al cual han sido expuestas. ***La rugosidad absoluta*** (e) de la pared interna de una tubería es definida como la altura saliente promedia de granos de arena, estrechamente empacada y uniformemente distribuida, que podría dar el mismo comportamiento del gradiente de presión que la pared de una tubería real.

El análisis dimensional sugiere que el efecto de la rugosidad no se da en unidades absolutas sino en forma relativa al diámetro interno de la tubería, es decir, en términos de ***rugosidad relativa*** (e/D). Esta se define como la razón entre la rugosidad absoluta y el diámetro interno de la tubería, ambos expresados en las mismas unidades (cantidad adimensional).

$$\text{RUGOSIDAD RELATIVA} = \frac{\text{Rugosidad Absoluta}}{\text{Diámetro Interno}}$$

$$\text{RUGOSIDAD RELATIVA} = \frac{e\,(pie)}{D\,(pie)} = \frac{E\,(pulg)}{d\,(pulg)} \qquad (9)$$

La rugosidad absoluta no es una propiedad medible para una tubería. La manera de evaluarla es comparando los gradientes de presión obtenidos a partir de la tuberia en estudio con los de una tuberia que ha sido recubierta internamente con arena.

Si no existe ninguna información disponible sobre rugosidad absoluta, un valor de E= 0.0006 pulg. es recomendado para gasoductos.

La ecuación de Colebrook

Corresponde a la Ecuación (2) y es la referencia para el desarrollo de ecuaciones aproximadas para el cálculo directo del factor de fricción de Moody.

Como se anotó anteriormente, la ecuación de Colebrook es ***implícita en f***, y por tanto, requiere de una ***solución numérica***. Además, qh depende de f según la ecuación (1), y al mismo tiempo, f depende de qh como lo muestran las ecuaciones (2) y (3).

En efecto, resulta práctico disponer de una ***aproximación*** de la Ecuación de Colebrook que de lugar a una ***solución analítica*** de f, lo cual simplifica considerablemente la solución de la ec. (1). Aqui lo importante es la exactitud de la aproximación desarrollada para el cálculo de f.

Soluciones numéricas de la ecuación de Colebrook

Son aproximaciones explícitas a la solución de la ecuación del factor de fricción de Colebrook (ecuación 2), las cuales tiene diferentes intervalos de aplicabilidad, como se muestra en el cuadro No. 1. Estas soluciones aproximadas se diferencian en el número de constantes y en la fórmula que se utiliza para combinar estas constantes. Nótese que la expresión que se usa para calcular las constantes, generalmente es una aproximación de la ecuación de Colebrook.

Del cuadro No. 1 se observa que la ***ecuación de Serghides*** de tres constantes (A, B y C) es la más exacta de todas las ecuaciones explícitas del factor de fricción, con una desviación máxima, con respecto a la solución numérica de la ecuación (2), de 0.0023% y con una desviación ***promedio*** de 0.0002% (cien o más veces más pequeñas que las otras aproximaciones publicadas).

CUADRO No. 1

Exactitud de las aproximaciones explícitas de la ecuación del factor de fricción de Colebrook, obtenidas por soluciones numéricas.

AUTOR	VALIDEZ	EC No.	ECUACION APROXIMADA DEL FACTOR DE FRICCION	% DESVIACION ABSOLUTA	
				PROMEDIO	MAXIMO
Zigrang y Sylvester	$4000<N_{Re}<10^8$ y $0.0004<e/D<0.05$	10	$1/(f)^{0.5} = A$	0.208	0.859
		11	$1/(f)^{0.5} = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} - \frac{5.02A}{N_{Re}}\right)$ $A = \log \left(\frac{e/D}{3.7} - \frac{5.02}{N_{Re}} \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{13}{N_{Re}}\right)\right)$	0.027	0.138
T.K. Serghides	$N_{Re} > 2100$ y Cualquier e/D	12	$f = \left(4.781 - \frac{(A-4.781)^2}{B-2A+4.781}\right)^{-2}$ $A = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{12}{N_{Re}}\right)$ $B = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51A}{N_{Re}}\right)$	0.017	0.198
		13	$f = \left(A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A}\right)^{-2}$ $A = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{12}{N_{Re}}\right)$ $B = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51A}{N_{Re}}\right)$ $C = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51B}{N_{Re}}\right)$	0.0002	0.0023

NOTA: El % de desviación absoluta (% DA), es el valor de la diferencia fraccional entre el factor de fricción obtenido a partir de la ecuación aproximada y la solución numérica de la ecuación de Colebrook, multiplicada por 100.

% DA = [{(fa - f) / f }* 100]

donde f es el factor de fricción de Colebrook calculado numéricamente, y fa es la aproximación.

La ecuación del factor de fricción de Serghides

La ecuación (13) del cuadro 1 se identifica como la ecuación de Serghides de tres constantes para el cálculo del factor de fricción. Fue derivada mediante la aplicación de la técnica de convergencia acelerada de Steffenson para una solución numérica iterativa de la ecuación de Colebrook.

Las constantes A, B y C de la ecuación de Serghides son expresiones aproximadas de la ecuación (2), las cuales se determinan mediante tres iteraciones por el método de sustitución directa. Adicionalmente, la ecuación (13) combina las tres constantes de acuerdo con la fórmula de Steffenson, así:

$$f = \left(A - \frac{(B - A)^2}{C - 2B + A} \right)^{-2} \qquad (13)$$

$$A = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{12}{N_{Re}} \right) \qquad (13a)$$

$$B = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51\, A}{N_{Re}} \right) \qquad (13b)$$

$$C = -2.0 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51\, B}{N_{Re}} \right) \qquad (13c)$$

Conclusión

La ecuación de Serghides de tres constantes (ecuación 13) se recomienda para usarse en cálculos computacionales de f. Una versión más sencilla es la ecuación (12), pues sólo tiene dos constantes (A y B) y es muy aproximada pero más fácil de usar en cálculos manuales de f. La ecuación (12) también fue obtenida mediante aplicación de la técnica de Steffenson a una solución numérica de la ecuación (2).

Bibliografía

1. CRAFT, B. C. and Hawkings, M, Applied Petroleum Reservoir Engineering, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice - Hall Inc., 1991

2. SERGHIDES, T. K., "Estimate Friction Factors Accurately" Chemical Engineering, Mar. 5, 1984, p. 63-64.

3. TOWLER, Brian F., and Pope, Timothy L., "New equation for friction - factor approximation developed" . Oil & Gas Journal, Apr. 4, 1994, p. 55-57

4. ZIGRANG, D J., and SYLVESTER, N.D., "Explicit Approximations to the and solution of Colebrook's frictions factor equation", Aiche J., Vol 28, No. 3, 1982