

BIFURCACIONES GLOBALES DE LA ECUACIÓN KORTEWEG DE VRIES

Mauro Montealegre Cárdenas.¹
Gustavo Londoño Betancurth.²
Luis Arturo Polania Quiza.³
Jasmidt Vera Cuenca.,
Edgar Montealegre Cárdenas.⁵

Resumen

En este estudio cualitativo sobre ecuación KdV encontramos que su sistema dinámico se fundamenta en la existencia de una órbita homoclínica solitónica, con simetrías del tipo "Orbit Flip" resonante. Para ello, las recurrencias en una vecindad global de estas soluciones solitónicas, generan un número finito de ciclos, en el caso de resonancias "Orbit Flip resonante" en las direcciones principales del equilibrio; o dinámicas caóticas, en el caso de resonancias noprincipales entre los valores propios del equilibrio. Por ello para describir las superficies asociadas a la continuación homoclínica o heteroclínica en el espacio de parámetros estudiamos, mediante diversas herramientas matemáticas, el campo vectorial no-lineal asociado a la ecuación KdV, sus sistemas variacionales y de valores propios.

Abstract

In this qualitative study of the equation KdV-Burger finds that its dynamic system depends fundamentally on the existence of a trajectory homoclinic of the type "Orbit Flip" resonant and with symmetries. For it, in a global neighborhood of these solutions there is a finite number of periodic orbits, in the case of the resonances in the main addresses; or chaos exists due to the period duplication, if the approaches are not in the main addresses. The pattern KdV-Burger examines the beds of fluids gas by perforation process. To describe the corresponding bifurcation surfaces we study in a global neighborhood of the homoclinic trajectory, the variational equation and the own values equation.

I. Introducción

Uno de los logros más notables de la segunda mitad del siglo XX, y que además ilustra con claridad la unidad subyacente de las matemáticas es la Teoría de Solitones. Los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento extremadamente inesperado e interesante.

Este descubrimiento provocó una enorme actividad investigativa que puso de manifiesto, de una forma muy hermosa, la unidad de las matemáticas. Concurrían aquí desarrollos en computación y en análisis matemático, que es la forma tradicional de estudiar las ecuaciones diferenciales. Resulta que estas soluciones pueden ser entendidas mediante elegantes construcciones de Geometría Algebraica. Las soluciones están también íntimamente ligadas a la teoría de Representaciones, porque estas ecuaciones poseen un número infinito de simetrías ocultas.

Estas ecuaciones también están relacionadas con cuestiones de geometría elemental. Por ejemplo, un problema interesante es el encontrar la superficie de un cono de volumen dado, pero con la menor área entre todas las superficies con una frontera dada. Las ecuaciones diferenciales que describen las

soluciones de este problema exhiben el mismo comportamiento de solitones de las ecuaciones que describen las olas de aguas poco profundas. De manera que hemos empezado con dos problemas matemáticos, uno en física matemática y otros en ecuaciones diferenciales, y hemos encontrado que los dos exhiben ese mismo comportamiento tan interesante y extraño causado por la existencia de los solitones.

Así obtenemos un panorama completo de las posibilidades cualitativas que ofrece el modelo KdV en las proximidades de las soluciones solitónicas, estudio que hemos designado como de "bifurcaciones del modelo", cuestión que resulta de mucha importancia para el control y diseño de procesos en diversos campos del conocimiento científico o tecnológico.

En los siguientes teoremas formulamos y probamos la existencia de soluciones homoclínicas para el sistema dinámico relacionado con una generalización de la ecuación (KdV) con condiciones iniciales.

Palabras Claves: Sistemas Dinámicos, Bifurcaciones globales, KdV-Burger, ondas no lineales y dispersivas, solitones.

^{1,2,3,4,5}Grupo de investigación Dinusco; Universidad Surcolombiana, proyecto de investigación "Aplicaciones de las Bifurcaciones del modelo KdV y contextualizaciones", 2006.

Teorema I

"Para la ecuación de la dinámica de solitones del modelo denominado KdV - Burgers con condiciones iniciales siguientes.

$$\begin{cases} u_{\zeta\zeta\zeta} - cu_{\zeta} + (g(u))_{\zeta} = \delta u_{\zeta\zeta}, \\ u(\zeta, 0) = u_0(\zeta), \end{cases} \quad (1)$$

donde $\zeta = x - ct$, $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ pequeño y $g(u) = \frac{u^2}{2}$, existe una solución $u_{\zeta}(\delta)(\zeta)$ del tipo soliton que en un retrato de fases sistema dinámico tridimensional asociado, se trata de una órbita homoclínica "orbit flip" hacia una silla en el origen $\theta = (0,0,0)$ con resonancia entre las direcciones principales. Si $\delta = 0$, el origen $\theta = (0,0,0)$ es un equilibrio inestable del tipo orquilla, es decir, la órbita homoclínica se puede desdoblar en una bifurcación heteroclínica.

Prueba del teorema I

Por analogía con las variables de Lienar en el sistema de Van der Pool ver, [A], tenemos que la ecuación KdV-Burgers se puede expresar como el siguiente sistema dinámico en dimensión tres:

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta u + v \\ \dot{v} = w - g(u) \\ \dot{w} = cv + c\partial u \end{cases} \quad (2)$$

con condición inicial $u(\zeta, 0) = u_0(\zeta)$, para el caso en particular la función $u(u) = \frac{u^2}{2}$, el sistema específico es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta u + v \\ \dot{v} = w - \frac{u^2}{2} \\ \dot{w} = cv + c\partial u \end{cases} \quad (3)$$

y que se puede escribir como $\dot{\vec{u}} = F(\vec{u}; \vec{\mu})$, donde F es el campo vectorial

$$F : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \delta u + v \\ w - \frac{u^2}{2} \\ cv + c\partial u \end{pmatrix}, \text{ el símbolo "1" indica un vector transpuesto}$$

Entonces el sistema (2) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es un sistema de la forma

$\dot{\vec{x}} = A(\vec{u}; \delta, c) + G(\vec{u}; \vec{\mu}) = \vec{F}(\vec{u}; \vec{\mu})$ con único equilibrio en el origen de coordenadas $\theta = (0, 0, 0)$, y función característica en θ igual a:

$$\det \begin{pmatrix} \delta - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & c & -\lambda \end{pmatrix} = (\delta - \lambda)(\lambda^2 - c); \quad (5)$$

tenemos que los valores propios de la matriz $A(\theta, \delta, c)$ son: $\lambda = \delta$, $\lambda = \pm\sqrt{c}$. Luego si $0 < \delta < \sqrt{c}$, el equilibrio es de tipo silla y las variedades locales tiene las siguiente dimensiones:

$\dim(W^s(\theta; \vec{\mu}_0)) = 1$, $\dim(W^{su}(\theta; \vec{\mu}_0)) = 2$, $\vec{\mu}_0 = (\delta_0, c_0)$. Si $\delta < 0$ las dimensiones son al contrario; si, además $|\sqrt{c}| > \delta$ se genera una dinámica complicada, ver [A] pues la resonancia es en éste último caso es entre direcciones no principales de los vectores propios.

Si $\delta = 0$, el equilibrio θ es del tipo orquilla y para $w = f(u)$, suge una dinámica complicada análoga al fenómeno Canard ver [A]. De otro lado, la ecuación $u_c(\zeta)$, dada por la fórmula (1) es una solución de (3) bi-asintótica hacia el origen, esto es

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u_c(\zeta) = \theta;$$

con $|u_c(\zeta)| = 0 (e^{\sqrt{c}\zeta/\mu_0})$ cuando $\zeta \rightarrow -\infty$, $|u_c(\zeta)| = 0 (e^{-\sqrt{c}\zeta/\mu_0})$ cuando $\zeta \rightarrow +\infty$.

Observamos que la segunda y tercera componente del sistema (3), para u fijo, forman un subsistema Hamiltoniano en las variables (v, w) .

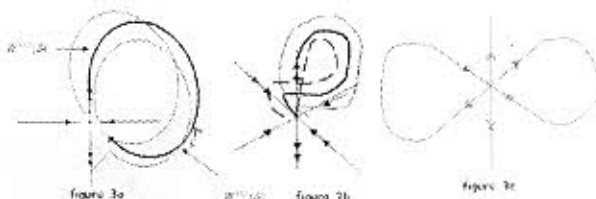


Figura 1. Bifurcaciones globales: "Orbit Flip" hacia una silla resonante en el origen

Así tenemos que la solución u_{ζ} unido con el equilibrio θ corresponde a lazo homoclínico del tipo "Orbit Flip resonante" como lo indica la figura 1a), la cual se desdobla inicialmente como en la figura 1b), teniendo en cuenta las simetría indicada en la gráfica 1c).

Primero asumimos que $\delta \neq 0$, en este caso los vectores propios asociados a los valores propios son los siguientes:

$$\delta - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v = \bar{u}, -\sqrt{c} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \\ \delta\sqrt{c} \end{pmatrix} u = \bar{w}, \sqrt{c} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta\sqrt{c} \end{pmatrix} u = \bar{w}$$

La matriz de cambio de base de vectores propios a la base canónica es la siguiente

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\delta & \alpha \\ 0 & \delta\sqrt{c} & \delta\sqrt{c} \end{pmatrix} \text{ con } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\delta\sqrt{c}} \\ 0 & -\frac{1}{2\delta} & \frac{1}{2\delta\sqrt{c}} \\ 0 & \frac{1}{2\delta} & \frac{1}{2\delta\sqrt{c}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

para el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (7)$$

en la parte lineal en el origen de (6) obtenemos el siguiente sistema diagonalizado:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = Q.A.Q^{-1} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $B = Q.A.Q^{-1}$; y obtenemos que la parte no lineal en estas coordenadas es

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \text{ es ahora } \begin{pmatrix} R_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \\ R_2(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \\ R_3(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{u^2}{2\delta}.$$

Si $\delta = 0$ en (3) tenemos que en el origen $\theta = (0, 0, 0)$ hay una bifurcación local del tipo orquilla, ver [A.A]. De otro el sistema (3) tiene la simetría $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, t) \rightarrow (-\bar{u}, \bar{v}, -\bar{w}, -t)$, esto es, si

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

con respecto al campo $F(\bar{u})$ tenemos: $F(L(\bar{x})) = L(F(\bar{u}))$. Finalmente obtenemos el sistema no lineal en la base de vectores propios siguiente,

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \\ R_2(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \\ R_3(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde $\bar{u}(t)$ es la solución de (4). Las formas más simplificadas de éste sistema se obtiene vía colchetes de Lie para el sistema matricial diagonal, con lo cual queda demostrado el teorema 1.

En el siguiente teorema sintetizamos el estudio de las recurrencias alrededor de la solución solitónica de u_c de (3), es el método de Poincaré.

ii) el sistema adjunto al sistema variacional (11) es el siguiente sistema ortogonal:

$$\dot{\phi} = -\hat{\sigma} DF^\perp(u_c(\zeta)); \quad (18)$$

donde $\hat{\phi}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{v} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ que es el vector de la segunda y tercera componente

de (3); y entonces la solución acotada del sistema adjunto variacional (59), ver [N1] es igual a:

$$\hat{w} = (-\hat{v}, \hat{z}) \cdot \exp\left(\int_0^\infty \text{tr}(\zeta; \sigma(DF(u_c(\zeta)))) d\zeta\right) \quad (19)$$

Aclaremos también que el sistema (56) se puede expresar como sistema matricial con parámetros siguientes:

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = D\sigma(\zeta, \lambda, \delta)\phi \quad \text{con} \quad \phi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}. \quad (20)$$

es un sistema Hamiltoniano, con sus parámetros en el dominio siguiente:

$$\begin{cases} (\lambda, \delta) \in \Omega = \{(\lambda, \delta) / 0 \leq \delta \leq \delta_0, \lambda \in \Omega^\lambda\} \\ \Omega^\lambda = \{\lambda \mid R_c(\lambda) \geq \varepsilon_0, \varepsilon_0 \text{ para algún } \lambda < 0\} \end{cases} \quad (21)$$

donde $R_c(\lambda)$ es la parte real de λ ; en el límite, cuando $\lambda \rightarrow +\infty$ el sistema (18) es el siguiente sistema

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \hat{\sigma} = A^\infty(\lambda, \delta)\phi \\ \phi_0 = \phi_0(0) \end{cases} \quad (22)$$

que tiene como simigrupo $e^{A^\infty \phi}$ y depende de la proyección de $\phi_0(0)$ en el Kernel de $A^\infty(\lambda, \delta)$. De (20) y (22) podemos calcular simultáneamente los dos siguientes sistemas de valores propios en el límite cuando $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$(A^\infty - \mu)\phi(\lambda) = \hat{\phi}(\lambda)(A^\infty - \mu) = 0, \quad (23)$$

cuyos valores μ pueden también estar en el Resolvente $R_1(\mu)$ de A^∞ , el resolvente de $A^\infty(\lambda, \delta)$ es definido así:

$$R_1(\mu) = (A^\infty - I\mu)^{-1}; \quad (24)$$

o su continuación analítica mediante transformación "L", con las propiedades de simetrías que provienen de la matriz "L" en (23),

$$\begin{cases} Lu(x) = u(-x) \\ L\partial_\zeta L_c = -\partial_\zeta L_c L \\ R_1(\mu)g(\mu) = -LR_1(-\mu)Lg(\mu) \end{cases} \quad (25)$$

iii) Podemos encontrar soluciones en $\tilde{u}(\zeta, \lambda, \delta)$ del sistema variacional (25) construidas a partir de la denominada función de Evans $D(\lambda, \delta)$ asociada a (22) y (25), ver [H.L.K] y figura 2b), definida así:

$$D(\lambda, \delta) = v(\zeta, \lambda, \delta) \cdot w(\zeta, \lambda, \delta), \quad (26)$$

cuando $R_c(\lambda) \geq 0$; esto que la existencia de la función $D(\lambda)$ es evidente para $R_c(\lambda) \leq 0$; por ejemplo para $R_c(\lambda) = 0$, se tiene que $\tilde{u} = u_\zeta$. Así tenemos que:

$$\tilde{u}(\zeta)(\zeta, \lambda, \delta) = \begin{cases} D(\lambda, \delta)e^{\mu_1 \zeta} & \text{si } \zeta \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{si } \zeta \rightarrow -\infty \end{cases} = e^{\mu_1(\lambda)\zeta}(\tilde{u}_1 + \Psi(s)). \quad (27)$$

Donde hacemos $B = A^\infty - \mu_1 I$, $R(s) = A(s) - A^\infty$, si $\partial_s \Psi(s) = (B + R)(\bar{u}_1 + \Psi)$ su solución es $\Psi(s) = \bar{u}_1 - \int_0^{+\infty} e^{B(s-t)} R(t) (\bar{u} + \Psi(t)) dt$.

Del estudio de los ceros de multiplicidad dos (2) de la función de Evans $D(\lambda, \delta)$ surge una expresión como la siguiente para el resolvente de (27):

$$R_1(\mu)(A - \mu I)^{-1} = \frac{D(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{P_0}{\lambda} + R_0(\lambda) \quad (28)$$

Po es el residuo de $R_1(\mu)$ en $R_1(\mu)$ en $\mu_0 = 0$, esto es,

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (A - \mu I)^{-1} d\mu. \quad (29)$$

según la figura 2a) para la curva cerrada [De (29) se deduce que $D(\lambda, \delta)$ induce polos en el resolvente, llamados polos resonantes.

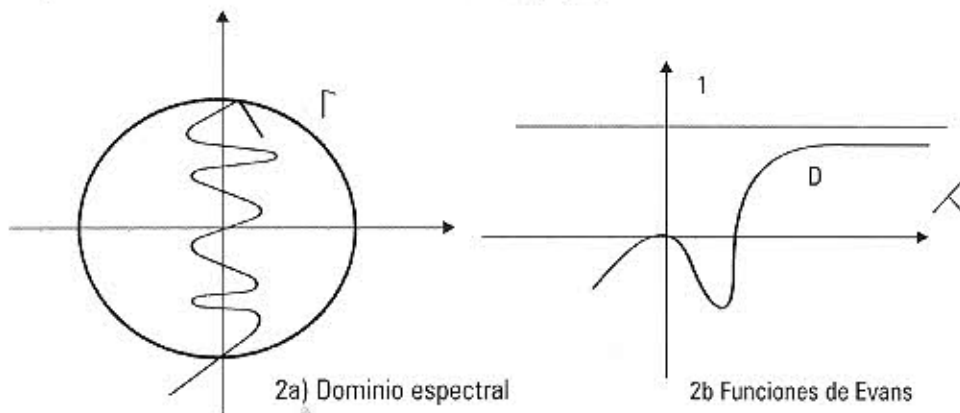


Figura 2. Funciones de Evans y su dominio.

El mapeo de Poincaré resulta del flujo de

$$-\partial_{\zeta} \bar{u} + c \partial_{\zeta} \bar{u} - g(u_c) = 0, \quad (30)$$

ecuación diferencial que está en el núcleo de la derivada paramétrica del trasladado del Hamiltoniano, H-cN, esto es de $\frac{\partial}{\partial \zeta} (H, cN) = 0$; donde:

$$\begin{cases} N[\mu] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 ds \\ H[\mu] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} (\partial_{\zeta} u)^2 + G(u) \right) ds \\ G(u) = \int_0^u g(s) ds. \end{cases} \quad (31)$$

La dinámica del flujo próxima al lazo homoclínico u_c , ver figura 3a) solución de la ecuación diferencial (18), se estudia mediante su función de energía asociada, $E(u, u_c)$, que es obtenida del Hamiltoniano mencionado arriba esto es:

$$E(u, u_c) = \frac{1}{2} u_c^2 - \frac{1}{2} c u^2 + \int_0^u g(s) ds \quad (32)$$

teniendo en cuenta que su derivada $\frac{d}{d\zeta}$ es positiva,

$$\dot{E}(u, v_\zeta) = \alpha u_\zeta^2 \geq 0. \quad (33)$$

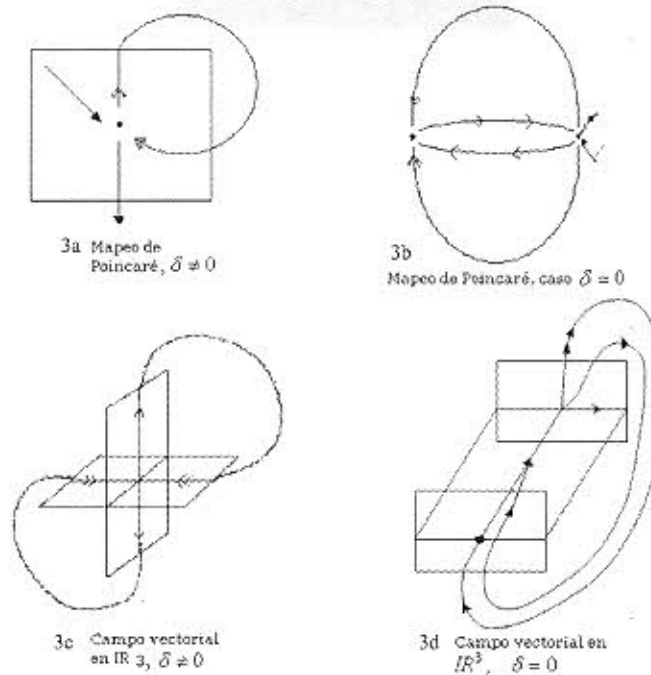


Figura 3: Desdoblamiento con respecto al parámetro δ

Las órbitas homoclinicas que hemos descrito se representan en la figura 3; y además dado que $\partial_\zeta g(u_c(\zeta)) \rightarrow 0$ cuando $|\zeta| \rightarrow \infty$, entonces la ecuación característica de (30) es el siguiente polinomio en v con parámetro ζ :

$$P_{kdv}(v) = v^3 + \delta v + \zeta \quad (34)$$

Para el cual existe una raíz $\mu_1(\zeta, \delta)$ se satisface la siguiente relación:

$$R_c(\mu_1(\zeta, \delta)) \leq 0 \leq R_c(\mu_{j>1}(\zeta, \delta)), \quad (35)$$

Si por ejemplo $\delta = 1$, tenemos que $v = r + \frac{1}{3r}$ con $r = \theta^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2\pi i k}{3}}$ con $\theta = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \frac{4}{27}} \right)$, se cumple la condición (35) cuando $\zeta = -\sqrt{\frac{4}{27}}$ por ello las variedades globales invariantes tienen las siguientes dimensiones:

$E_{\mu_1(\zeta)}^{s(\zeta)}(u_c(\zeta; \mu))$ es unidimensional $E_{\mu(\zeta)}^{u(\zeta)}(u_c(\zeta; \mu))$ es bidimensional con

$$E_{\mu_1(\zeta)}^{s(\zeta)}(u_c(\zeta; \mu)) \cap E_{\mu(\zeta)}^{u(\zeta)}(u_c(\zeta; \mu)) \neq \emptyset \quad (36)$$

porque la codimensión de esta intersección entre variedades es la suma de sus codimensiones. Esto es, ζ es un autovalor de (11) si la condición se cumple cuando $|\zeta| \rightarrow \infty$ infinito; equivalente a decir que existe una solución acotada para este sistema, o también equivalente resolver para la ecuación $D(\zeta, \delta) = 0$

En (30) si $\theta = a(u_c - (1+a^2)t)$ y $u_c(\zeta) = a^2 \sec^2\left(\frac{\theta+r}{2}\right)$,

$$u_c = \frac{\partial^2}{\partial \zeta} (\log f(\theta)) \text{ con } f(\theta) = 1 + ce^\theta \text{ y } c = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \text{ con } r = \ln c.$$

obtenemos la función de Evans particular para la KdV es

$$D_{kdv}(\lambda) = \left(\frac{\mu_1(\lambda) + 1}{\mu_1(\lambda) - 1} \right)^2 \quad (37)$$

Además así

$$\varsigma_1 = x_1^u(\mu) \in W^u(u_c(\varsigma); \mu) \cap \Sigma, \quad \varsigma_2 = x_2^s(\mu) \in W^s(u_c(\varsigma); \mu) \cap \Sigma$$

la función separación entre las variedades invariantes $W^s(u_c(\varsigma); \mu)$ y $W^u(u_c(\varsigma); \mu)$ es dada por la siguiente ecuación:

$$d(u) = x_1^u(\mu) - x_2^s(\mu) = \alpha(\mu) u_c(0),$$

con respecto a parámetros la derivada es igual a la siguiente función del "Mel-nikov":

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}_0(\varsigma) \frac{\partial F}{\partial \mu}(u_c(\varsigma), 0) ds.$$

la ecuación (37) se anula en $\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, es el "índice del punto de silla en el infinito", ver figura 3b). Recordamos que un sistema de la forma $-\dot{\phi}_{xxx} = \lambda \phi$ como solución $\phi = e^{\sqrt{-\lambda}x + i\lambda \sqrt{-\lambda}x}$ lo que implica $D_{KdV}(\lambda) \cong D(\sqrt{\lambda}, \lambda \ln \sqrt{\lambda})$.

Entonces

$$signo = \frac{dD(\lambda, \delta)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = signo \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \quad (38)$$

Dado que

$$\frac{dD(\lambda, \delta)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \det \left(\frac{du_c^+(0)}{dv} \Big|_{v=c_0} - \frac{du_c^-(0)}{dv} \Big|_{v=c_0} \right) \cdot \hat{\phi}(0) \quad (39)$$

el signo de la ecuación (38) da un criterio para clasificar la órbita homoclínica " u_c " entre "Twist", o no "Twist", es el $r(\mu)$ de (37). Para el sistema variacional (11) existe estructura de dicotomía exponencial en $(-\infty, \varsigma] \cup [\varsigma + \infty)$, con proyección $P = D(\lambda, \delta)^{-1} \hat{\phi} \hat{u}(0, \lambda) \hat{u}^\perp(0, \lambda) \phi$ y constantes $\alpha > 0, k > 0$:

$$\|\phi(s) P \phi^{-1}(\delta)\| \leq k e^{-\alpha(s-\delta)} \quad \text{si } s > \delta \quad (40)$$

$$\|\phi(s) (I - P) \phi^{-1}(\delta)\| \leq k e^{-\alpha(\delta-s)} \quad \text{si } \delta > s, \quad (41)$$

en consecuencia existe la siguiente función de Green asociada a la ecuación diferencial (11):

$$K(s, \delta, \alpha) = \begin{cases} \phi(s) P \phi^{-1}(\delta) & \text{si } s > \delta \\ -\phi(s) (I - P) \phi^{-1}(\delta) & \text{si } s < \delta. \end{cases} \quad (42)$$

entonces la solución de (30) es $u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, \delta, \alpha) g(\delta) d\delta$. De (40) también tenemos que $\hat{u}(\varsigma) = \phi(\varsigma) (I - P) \{ \phi^{-1}(0) \hat{u}(0) + \int_0^\varsigma \phi^{-1}(s) M(\hat{u}(s); \mu) ds \} = 0$, esta igualdad a cero es exigida para la convergencia de las soluciones de (42).

v) Finalmente para describir mejor el diagrama de bifurcaciones reescalamos el tiempo usando

$t = \arctan \varsigma = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)$ tenemos así la siguiente ecuación variacional en un dominio compacto S^1 :

$$\dot{\phi} = DF(u_c(\varsigma(\tau)), \mu) \cdot \phi \dot{\tau} = k(1 - \tau^2), \quad (43)$$

que se puede proyectar al plano proyectivo real IRP^2 , teniendo en cuenta que su grupo fundamental es Z^2 ,

$$\pi(IRP^2) \cong Z^2, \quad (44)$$

El sistema (12) converge cuando $\kappa \rightarrow \pm\infty$ uniformemente para (κ, δ) en un compacto Ω , hacia un sistema matricial como el (63). Entonces en este compacto tenemos que $[g] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ y además:

$$\begin{aligned} D(\kappa_1) \cdot D(\kappa_2) > 0 &\rightarrow [g] = 0, \text{ implica raíces pares de } D \text{ en } [\kappa_1, \kappa_2], \\ D(\kappa_1) \cdot D(\kappa_2) < 0 &\rightarrow [g] = 1, \text{ implica raíces impares de } D \text{ en } [\kappa_1, \kappa_2]; \end{aligned} \quad (45)$$

además, si $\frac{dD(\kappa)}{d\kappa} < 0$, entonces $D(\kappa) > 0$ si $\kappa < 0$ y $[g] = 0$; lo que permite detectar, contar y calificar entre el carácter "twist", homeomorfo a una banda de Moebius de la variedad $W^{s,z}u_c(\kappa)$, en el primer caso; o "no-twist", en el segundo caso. Ver diagramas de bifurcación en [M].

En el siguiente teorema tratamos los mecanismos de control en modelo KdV, usando una versión con perturbación singular denominada como KdV-KS.

Teorema III

"Para la ecuación KdV - Kuramoto - Sivashisky, KdV-KS, siguiente

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + \varepsilon(u_{xx} + u_{xxx}) = 0 \\ t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (46)$$

$\varepsilon = 0$ corresponde a las ondas de la KdV, $\varepsilon \neq 0$ corresponde a un sistema que controla la velocidad de la onda en coordenadas móviles $\zeta = x - ct$. Entonces que existe una superficie en el espacio de parámetros $\mu = M(c)$, la cual corresponde a la sostenibilidad de la solución homoclinica en el sistema perturbado (46), conocido como la ecuación KdV-KS"

Prueba del Teorema II

Hacemos en (46) las derivadas con respecto a ζ , $\frac{d}{d\zeta}$, estos es,

$$-cu_\zeta + u \cdot u_\zeta + u_{\zeta\zeta\zeta} + \varepsilon(u_{\zeta\zeta} + u_{\zeta\zeta\zeta}) = 0, \quad (47)$$

equivalente al sistema tridimensional siguiente

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(u - \frac{u^2}{2} - w - \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}} v \right) \end{cases} \quad (48)$$

La restricción de (48) a su variedad crítica corresponde la siguiente gráfica

$$M_0 \equiv \left\{ (u, w) / w = u - \frac{u^2}{2} \right\} \quad (49)$$

Para $(u, w) \in M_0$ en un conjunto compacto, de (49) tenemos el siguiente sistema restringido:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = u - \frac{u^2}{2} + 0(\varepsilon), \end{cases} \quad (50)$$

Se trata de sistema un Hamiltoniano, que hasta en orden $0(\varepsilon^2)$ es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = u - \frac{u^2}{2} + \varepsilon\sqrt{c} \left(u - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)v \right) + 0(\varepsilon^2) \\ \dot{\zeta} = 0 \\ \dot{t} = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Observe que en general (51) es un sistema como el siguiente

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \\ \dot{y} = f(x, y). \end{cases} \quad (52)$$

Si $\varepsilon = 0$, de $f(x, y) = 0$ obtenemos por el teorema de la función implícita, una curva $x = m(y)$, tal que en $y = y(m(y), y)$ corresponde a un "subsistema lento" cuyo flujo es:

$$Y_M^{slow} : IR \times M \rightarrow M \tag{53}$$

donde $M = \{(x, y) / x = m(y), y \in y\}$; en este caso observamos que el sistema (53) usamos el blow up (cambio de variable singular) siguiente:

$$\begin{cases} u = r\bar{u} \\ v = r\bar{v} \\ w = r\bar{w} \\ r\bar{t} = \bar{t} \end{cases} \tag{54}$$

finalmente se puede expresar (51) como un campo vectorial singular siguiente:

$$\frac{d}{d\bar{t}} : \begin{cases} \dot{u} = \varepsilon v \\ \dot{v} = \varepsilon w \\ \dot{w} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(u - \frac{u^2}{2} - w - \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}} v \right) \end{cases} \tag{55}$$

Para obtener implícitamente. La superficie M, tal que si S es la superficie de puntos críticos de (55), tenemos que para $v = 0$ existe una intersección no trivial

$$W^s(S) \cap_{\varepsilon=0} W^u(S) \neq \emptyset, \tag{56}$$

lejos del equilibrio las curvas de la intersección (56) son $u^- = h^-(c, \varepsilon)$, y $u^+ = h^+(c, \varepsilon)$, respectivamente; la separación $d(c, \varepsilon)$ entre estas variedades $W^s(S)$ y $W^u(S)$ es:

$$\begin{aligned} d(c, \varepsilon) &= h^-(c, \varepsilon) - h^+(c, \varepsilon) = \varepsilon \bar{d}(c, \varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{dh^+}{d\varepsilon} - \frac{dh^-}{d\varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \varepsilon M(c) \end{aligned} \tag{12}$$

con $M(c) = 0$ corresponde a la continuación homoclínica $u_c(c, \mu)$, con la condición genérica $M(c) \neq 0$. A continuación probaremos que

$$M(c) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \left\{ c \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{u}^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}^2 \right\} \right\} \tag{57}$$

En efecto, recordamos que la ecuación variacional $d\dot{Z} = DF(z) dZ$ se puede escribir como

$dz p = D\tilde{F}(z) dz(p)$ con $dz(p) = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, sobre lo cual definimos el producto exterior con sus derivadas así:

$$(dZ_{i_1} \wedge dZ_{i_2})(v_1, v_2) = dZ_{i_1}(\bar{v}_1) dZ_{i_2}(\bar{v}_2) - dZ_{i_1}(\bar{v}_2) dZ_{i_2}(\bar{v}_1); \tag{58}$$

$$(dZ_{i_1} \wedge dZ_{i_2}) = (dZ_{i_1}) \wedge dZ_{i_2} + (dZ_{i_1}) \wedge (dZ_{i_2}) \tag{59}$$

Los tres vectores lineal independientes y tangentes en $t = 0$ a $W^s(S) \cap W^u(S)$ son las siguientes:

$$\begin{cases} n_1 = \left(\frac{dh^+}{d\varepsilon}, 0, 1, 0 \right) \\ n_2 = \left(u, u - \frac{u^2}{2}, 0, 0 \right) = (0, \alpha, 0, 0), \quad \alpha < 0 \\ n_3 = (0, 0, 0, 1). \end{cases} \tag{60}$$

y de [D.K.O.J.] obtenemos las siguientes identidades

$$i) \quad (du \wedge dv \wedge dc)(n_1, n_2, n_3) = \alpha \frac{db^+}{dz} \quad (61)$$

$$ii) \quad (du \wedge dv \wedge dc) = \sqrt{c} \left(u - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right) v du \wedge dv \wedge dc \quad (62)$$

$$iii) \quad \begin{cases} n_1 t = (*, *, 1, 0) \\ n_2 t = \left(v, u - \frac{u^2}{2}, 0, 0 \right) \\ n_3 t = \sqrt{c} (*, *, 1, 0) \end{cases} \quad (63)$$

$$iv) \quad (du \wedge dv \wedge dc)(n_1 t, n_2 t, n_3 t) = v$$

$$v) \quad (du \wedge dv \wedge dc) = -\sqrt{c} \left(u - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right) v^2$$

$$vi) \quad \text{Entonces } M(v) = -\sqrt{c} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (u-1) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \right] \quad (64)$$

Para obtener la forma final de (57) usamos la siguiente expresión

$$(\dot{a})^2 = (v)^2 = \left[u - \frac{u^2}{2} + \sqrt{c} \left(u - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right) v + 0 (v^2) \right]^2 = (u-1) v^2 \quad (65)$$

CONCLUSIONES

En este proyecto de investigación hemos obtenido los resultados de la dinámica cualitativa sobre el modelo KdV, están escritos en forma de teoremas y en gran medida son descripciones matemáticas originalmente publicadas en este artículo, y estas son:

1. La ecuación KdV tiene soluciones homoclínicas simétricas hacia una silla resonante; estas son soluciones solitónicas del tipo "orbit Flip" (Teorema I).
2. La órbita solitónica u_s puede generar una multiplicidad de órbitas periódicas en sus proximidades, dependiendo de que el parámetro sea cero, o no. Esto se consiguió resolviendo el problema de valores propios, equivalente a las continuidades homoclínicas, a través de la teoría de las funciones de Evans (Teorema II) y un concepto de índice homotópico.
3. El modelo KdV tiene una versión que permite realizar control sobre la velocidad y sostenibilidad de las ondas solitónicas, es el modelo KdV-SK (Teorema III).
Obtuvimos así una descripción analítica y generalizada de las Bifurcaciones globales de la familia de los sistemas KdV y sus aplicaciones.

REFERENCES

- [A] Arnold, J. Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics 1605.
- [D.E.G] Roger K. Dodd, J. Chris Eilbeck, John Gibbon, "Soliton and Non linear wave equations"; Academic press, London, 1990, 1994.
- [D.K.O] Freddy Dumortier, Hiroshi Kokubo, Hironaka Oka; A degenerate singularity generating geometric Lorenz attractors; Ergodic theory and Dynamical systems, 1995, 15, 833-856.
- [F] Fitzh, J. Evans in Fitzh-Nagumo, 1975: Nerve axon equations iv: the stable unstable Impulse, Medical Math J 24, 1169-1190.
- [F.P.U] Fermi, Pasta and Ulum. "Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states", 1985, Phy Rev, 15, 240-243.
- [G.G.K.M] L. Gardner, G. Greene, K. Kruskal y I. Miura; "Methods for solving the Korteweg de Vries equation", Physical Review Letters 19 (1967) P.P 1095-1097.
- [H] Richard Haberman, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Prentice Hall, 2003.
- [H.I.K] Hiroshi Kokubo; Homoclinic and Heteroclinic Bifurcations of Vector fields; Japan J. Appl Math 5 (1988), 455-501.
- [H.K] Ale Jan Hamburg and Bernd Krauskopf; Resonant homoclinic Flip bifurcations; preprint Freie Universität Berlin, 2000.
- [I.H] S. Ibañez y J.A Rodríguez; "Shilnikov Configurations in Nilpotent singularity", Universidad de Oviedo, España, 2005.
- [K] Kruskal M, "The Korteweg - de Vries equation a related evolution equations", in "Nonlinear wave Motion", proceeding, potsdam, NY, 1972.
- [K.d.V] D.J Korteweg and G. de Vries "On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type a long stationary waves"; phyl. Mag, (s) 39, 1985 p.p 422-443.
- [M] Mauro Montealegre Cardenas; Bifurcations Homoclinicas para sillas en R3, tesis doctorado; Universidad de Sao Pablo, IME 1996.
- [M.L] P. Muruganandan and M. Lakshmanan; "Bifurcations analysis of the travelling Waveform of Fitz Hugh-Nagumo Nerve" Conduction model equation; Chaos 7 (3), 1997.
- [M.N] A.G Maksimov and V.I. Nekorkin; Soliton Trains and I-V characteristics of Long Josephson Junctions; International journal of bifurcations and chaos, 1999.