UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO ASOCIADO AL NÚMERO ÁUREO

Luis Arturo Polanía Quiza*

Resumen

Inicialmente, en este trabajo se obtiene una sucesión de estimaciones del lado del decágono regular inscrito en una circunferencia unitaria que converge hacia el número áureo; la cual a su vez, permite obtener el sistema dinámico discreto $([0,1], f)$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x}$ la ley de evolución del sistema. Finalmente, iterando la ley de evolución un número suficientemente grande y evaluando estos iterados en cualquier punto de [0,1], encontramos una infinidad de sucesiones de elementos de [0,1] con la propiedad de Cauchy, y todas convergentes hacia el número áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. De paso, demostrándose así la completez del espacio de fases [0,1] con la métrica usual.

Palabras claves: *sistema dinámico discreto, procesos iterativos, espacio de fases o espacio de estados, variables de estado, ley de evolución del sistema, orbita de un punto, punto fijo.*

A DYNAMIC DISCRETE SYSTEM RELATED TO THE AUREUS NUMBER

Abstract

At the beginning of this work, it is obtained a succession of estimations of the regular decagon's side which is inscribed in an unitary circumference. This one converges on the aureus number. At the same time, this succession is useful to obtain the discrete dynamical system $([0,1], f)$. Being $f(x) = \frac{1}{1+x}$ the law of evolution of the system. Finally, it's iterated the law of evolution a number sufficiently high and evaluated these iterates in whichever point from [0,1]. As a result, we find an infinity of successions of elements from [0,1] with the Cauchy property. All these successions converge on the aureus number $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. In this way, it's demonstrated the completeness of the space of phases [0,1] with the usual metric.

Key words: *discrete dynamical system, iterative processes, phase space or state space, state variables, law of evolution of the system, point orbit, fixed point.*

Artículo recibido: 10/11/07 Aprobado: 06/05/08

*Luis Arturo Polanía Q., Profesor de la Universidad Surcolombiana, lapola@usco.edu.co - Grupo de Investigación DINUSCO FACIEN.

Introducción

Los Sistemas Dinámicos Discretos se pueden ver como modelos matemáticos para describir procesos que evolucionan en el tiempo que recorre los números enteros. En contraste con las ecuaciones diferenciales, estos modelos se adaptan bien a situaciones donde ocurren cambios en tiempos específicos en vez de continuamente.

El estudio de los sistemas dinámicos discretos implica directamente el proceso de iteración; que significa repetir un procedimiento u operación muchas veces. Este proceso repetitivo involucra la aplicación de una función matemática. Por ejemplo, el método de Euler, el método de Newton para encontrar raíces de polinomios, la ecuación de Malthus para estudiar la evolución de la población de una determinada especie, la parábola logística de May que Robert May formuló para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado, etc.

Desde un punto de vista matemático, un sistema dinámico discreto es una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ con } k = 0,1,2,...$$

donde f es una aplicación $f\colon X \longrightarrow X$ definida en cierto conjunto X, que recibe el nombre de *espacio de fases* o *espacio de estados*. Esta función por lo menos, debe ser *suave*, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes.

Las variables que describen un sistema, se llaman *variables de estado* y almacenan la información completa acerca del estado del sistema.

La ecuación del sistema dinámico discreto puede interpretarse como sigue: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será $x_{k+1} = f(x_k)$. La función f representa la ley de evolución del sistema dinámico, que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta. Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0, su evolución temporal es la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ llamada solución con condición inicial x_0. Se obtiene recursivamente, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, y en general $x_k = f^k(x_0)$.

El conjunto de valores $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\}$ recibe el nombre de órbita de x_0. Para el caso que nos ocupa, un sistema dinámico discreto unidimensional, el análisis gráfico ayuda mucho para entender la conducta global del sistema. Para trazar la órbita de un sistema dinámico discreto.

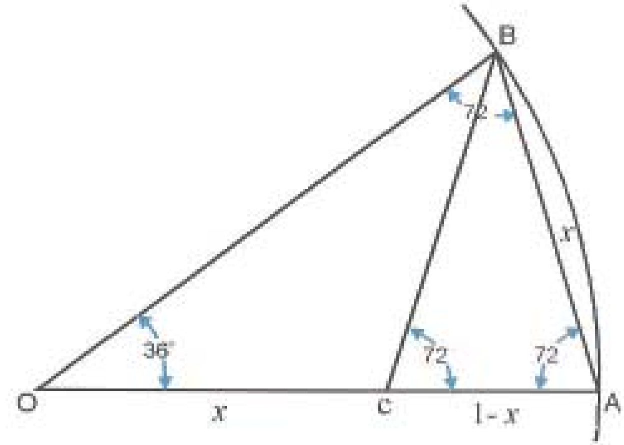

Figura 1: Diagrama de un lado del decágono regular inscrito en una circunferencia unitaria y los triángulos isósceles semejantes OAB Y CAB.

$f\colon [a,b] \rightarrow [a,b]$; $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ se dibuja en los ejes coordenados un gráfico de f, se traza la diagonal $y = x$ y se procede con los iterados. El punto de corte del trazo de f con el trazo de la diagonal corresponde a un punto fijo de f. En nuestro caso, el punto fijo es único y atractor y coincide con el número áureo.

Construcción del sistema dinámico asociado al número Áureo

Se inicia esta construcción con un lado de un decágono regular inscrito en una circunferencia unitaria. Nombramos con x la longitud del lado en mención y utilizamos el triángulo isósceles obtenido de lados iguales de longitud 1, y lado desigual de longitud x para trazar la bisectriz a uno de los ángulos de 72° y obtener así un nuevo triángulo isósceles de lados iguales de longitud x y lado desigual de longitud $1-x$; resultando estos dos triángulos isósceles, ser semejantes según semejanza ángulo-ángulo-ángulo (Figura 1).

Al ser semejantes, los triángulos OAB y CAB, se puede establecer la siguiente proporción

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad (1)$$

donde x representa la longitud de un lado del decágono regular.

Obtenemos de (1)

$$x = \frac{1}{1+x} \quad (2)$$

En consecuencia, (2) genera la siguiente fracción continua simple infinita correspondiente a la longitud del lado del decágono regular

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}} \quad (3)$$

A partir de la fracción continua simple (3) se puede obtener una sucesión de estimaciones del número x, a saber:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{1}, x_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, x_3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = \frac{2}{3},$$

$$x_4 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}} = \frac{3}{5}, x_5 = \frac{5}{8}, x_6 = \frac{8}{13}, x_7 = \frac{13}{21}, \cdots$$

esto es,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \cdots\right) = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (4)$$

donde a_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

Por lo tanto, de (4)

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = \cfrac{1}{1+\cfrac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{1+x_n} \quad (5)$$

con n = 0, 1, 2, 3, ...

En consecuencia, (5) nos dice que x_{n+1} está en función de x_n, esto es,

$x_{n+1} = f(x_n)$, n= 0, 1, 2, 3, ... (6)

donde f: [0,1]$\longrightarrow$ [0,1], definida por $f(x) = \frac{1}{1+x}$ para cada $x\in$ [0,1]. Obteniéndose así el sistema dinámico discreto dado por (6) asociado al número áureo x; puesto que el número x corresponde exactamente al punto de corte de la diagonal $y=x$ con la gráfica de la ley de transición de estados $f(x)$ en el espacio de estados [0,1]. En efecto,

$$f(x) = x \leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ó } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

pero $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no pertenece al espacio de estados [0,1]. Luego, el número áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es el punto fijo de f (Figura 2).

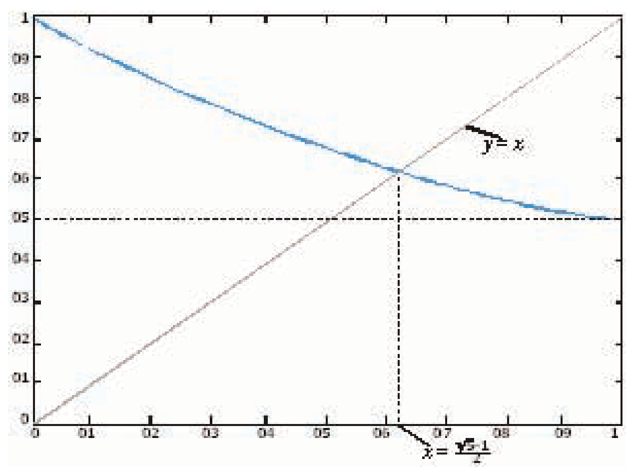

Figura 2: Gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y el punto fijo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ de f.

Obsérvese que como f es una función continua sobre [0,1], el Teorema de Brouwer garantiza la existencia de por lo menos un punto fijo de f en [0,1].

Además, es claro que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, punto fijo de f, se caracteriza por ser atractor. Pues la sucesión de iterados de cualquier punto $x^* \in$ [0,1] ,converge hacia él. Esto es,

$\lim_{n\to\infty} f^n(x^*) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ para todo $x^* \in$ [0,1] (Fig. 3).

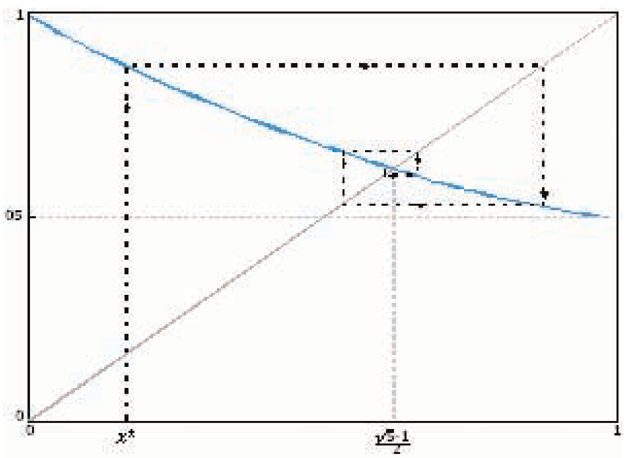

Figura 3: Gráfico que muestra la convergencia de la sucesión de iterados de cualquier punto al punto $x^* \in$ [0,1] fijo atractor $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

En efecto, si se tuviera $\lim_{n\to\infty} f^n(x^*) = \beta \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ con $\beta \in$ [0,1] , se tendría

$$f(\beta) = f\left[\lim_{n\to\infty} f^n(x^*)\right] = \lim_{n\to\infty} f\big(f^n(x^*)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x^*)$$

en virtud de la continuidad de la f . Luego, se tendría $f(\beta) = \beta$ lo que contradice el hecho de que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es el único punto fijo de f en [0,1].

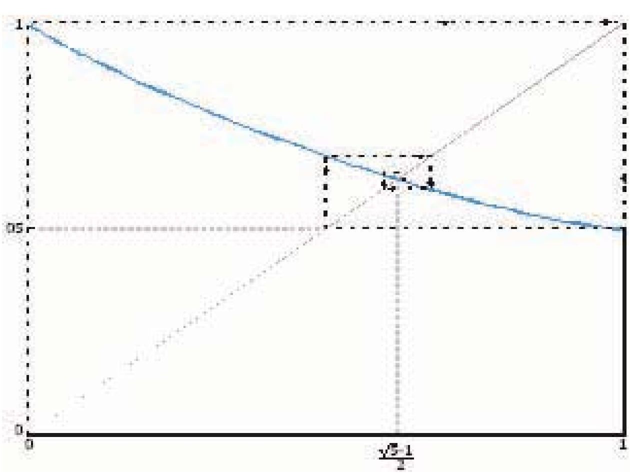

Figura 4: Muestra la convergencia de la órbita de 0, y converge al número áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Conclusión y ejemplos

El sistema dinámico discreto obtenido (6), nos permite encontrar una colección de sucesiones de Cauchy de números reales en el intervalo [0,1] todas convergentes hacia el número áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ejemplo 3.1 La sucesión de iterados

$$\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\dots\right)$$

corresponde a la órbita del punto 0, y converge al número áureo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *(Figura 4).*

Ejemplo 3.2 La sucesión de iterados

$$\left(\frac{1}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{9},\frac{9}{14},\frac{14}{23},\dots\right)$$

corresponde a la órbita del punto $\frac{1}{4}$*, y converge al mismo número (Figura 5).*

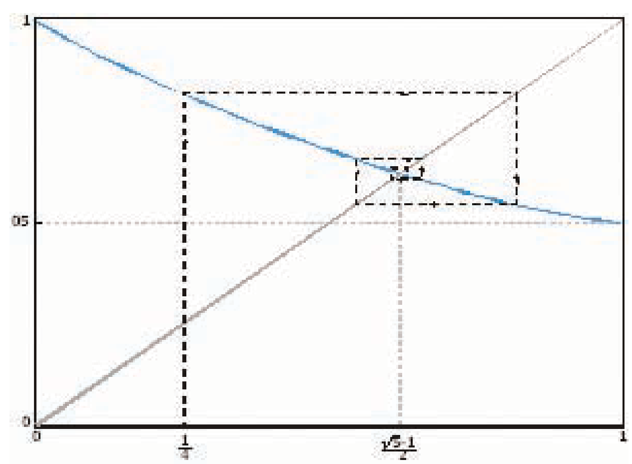

Figura 5: Muestra la órbita de $\frac{1}{4}$ convergiendo al número áureo.

Ejemplo 3.3 La sucesión

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2-\sqrt{2},\frac{3+\sqrt{2}}{7},\frac{10+\sqrt{2}}{14},\frac{24+\sqrt{2}}{41},\dots\right)$$

corresponde a la órbita del punto $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1]$*, y converge al mismo* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *(Figura 6).*

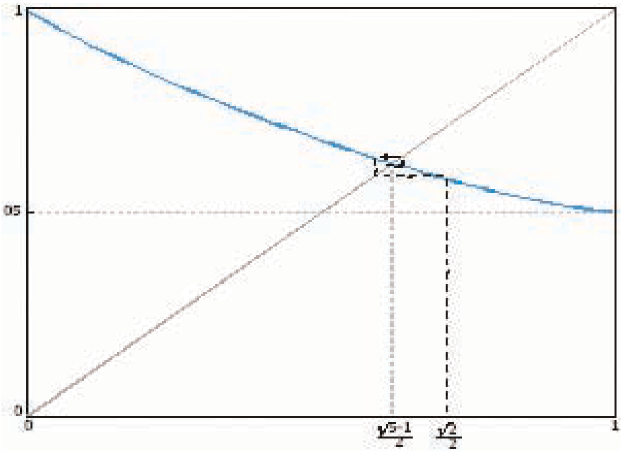

Figura 6: Muestra la órbita de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ convergiendo al número áureo.

Referentes Bibliográficos

BLANCHARD, P., DEVANEY, R. and HALL, G. Ecuaciones diferenciales. Thomson (1998)

MARTIN, M., MORAN, M. and REYES, M. Iniciación al caos, Sistemas Dinámicos. Síntesis, S.A

ROBINSON, C. Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. CRC Press (1995)

KUSNETSOV, Y. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer-Verlag (1995)