PROCESOS DE DISPERSIÓN A PARTIR DE MODELOS DE REACCIÓN ADVECTIVA NO LINEAL

DISPERSIVE PROCESS FROM NONLINEAR ADVECTIVE REACTION

Mauro Montealegre Cárdenas*
Edgar Montealegre Cárdenas**
Jasmidt Vera Cuenca***

Resumen

Estudiamos procesos de dispersión ubicados en un espacio de Hilbert; resultando dos modelos sobre fenómenos mezclantes, advectivos y de reacción; probamos que sus ecuaciones variacionales tienen autovalor simple correspondiente a ondas viajeras estables. Luego expresamos los operadores en términos de proyecciones espectrales, logrando condiciones suficientes para la estabilidad.

Palabras clave: modelos de dispersión, advección no-lineal, onda viajera, velocidad de salto, ecuación de transporte.

Abstract

We study the macroscopic dispersion process over a Hilbert space, which can give rise two models gives by mixing, nonlinear advection and reaction; we proved that its variational equations has simple autovalue which is a stable traveling waves. Then we can express the correspondents operators in terms of spectral proyections, to reached sufficient conditions to ensure stability of its solutions.

Key words: models of dispersion, nonlinear advection, traveling wave, velocity jump, transport equation.

Introducción

Este artículo de investigación corresponde al proyecto "Bifurcaciones y Aplicaciones Interdisciplinarias en los Sistemas Dinámicos Sobre Fenómenos Mezclantes con Reacción No-Lineal y Advección", en él explicamos los procesos dispersivos a nivel macro a través de modelos de transporte del tipo reacción y advección no lineales con explicación determinística, o a través de caminos aleatorios. El primero es una ecuación definida en un espacio de Hilbert dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (Bu)}{\partial x}=Au+f(u);$$

donde *A* es un operador sectorial, esto significa que tiene un autovalor $\mu_0 = 0$ simple y aislado, y los otros autovalores están en un sector delimitado entre ángulos determinados; *B* es un operador lineal y autoadjunto, corresponde a la advección; *f* es una función no lineal. Para esta ecuación encontramos una solución del tipo onda viajera, por métodos análogos al modelo de difusión - reacción no lineal del tipo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(u) \\ F(u) = u(u-a)\cdot(u-1) \quad \text{con } 0<a<1. \end{cases}$$

Demostramos que la variación espacial de la solución del tipo onda viajera corresponde a un autovalor simple $\mu_0 = 0$, la cual es estable.

Artículo recibido: 10/06/2009 Aprobado: 12/08/2009

* Ph.D en Matemáticas Aplicadas; Grupo Dinusco, Facultad de Ciencia Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana, proyecto de investigación "Bifurcaciones y Aplicaciones Interdisciplinarias en los Sistemas Dinámicos Sobre Fenómenos Mezclantes con Reacción No-Lineal y Advección". E-mail: mmontealegre.cardenas@gmail.com.

** Mg. en Matemáticas Aplicadas; Grupo Dinusco, Facultad de Ciencia Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana. E-mail: ingeinco01@yahoo.es

*** Mg. en Matemáticas Aplicadas; Grupo Dinusco, Facultad de Ciencia Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana. E-mail: jveracuenca@hotmail.com

El modelo de explicación por un camino aleatorio se expresa mediante la siguiente ecuación de transporte,

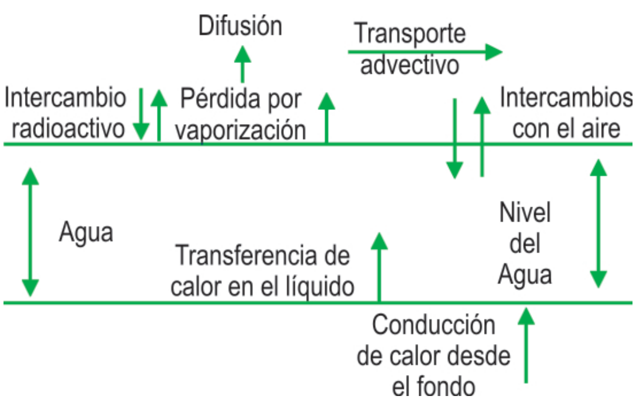
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}=-\lambda(\nu)u+\int_{v}T(v,v')\lambda(v')u(x,v',t)dv'.$$

Ecuación que explicamos en términos de operadores apropiados definidos en un espacio de Hilbert. El operador asociado a este modelo tiene también un autovalor $\mu_0 = 0$, el cual es simple, el resto de autovalores permiten expresar el operador como una suma de proyecciones en sus autoespacios.

En ambos casos en el límite, obtenemos modelos de Reacción - Difusión - Advectivos, los cuales tienen soluciones del tipo onda viajera, cuyas variaciones espaciales resultan estables.

1. Antecedentes

Podemos obtener un modelo básico consideramos el ejemplo de la contaminación en un entorno hídrico como el siguiente,



donde Ω es la masa de agua con frontera $\partial\Omega$, la cual suponemos suave. La razón de cambio continuo de masa está dada por el flujo a través de $\partial\Omega$, la cual se resume en la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}ud\nu=-\int_{\partial\Omega}x\cdot\eta ds+\int_{\Omega}fdv$$

donde dv es la integral de volumen; ds es integral de superficie, η es la dirección normal a $\partial\Omega$; $x = -k\nabla u+\mu v$, donde v es la velocidad intercambio con el medio.

Obteniendo la siguiente ecuación

$\frac{\partial u}{\partial t}$= *Difusión - Transporte - Decaimiento + fuente*

esto es,

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\text{gradiente }[-\alpha_u\bigtriangledown u]-\text{divergencia }[v\cdot u]-\sigma_u u+f(u)\\ u|_{\partial\Omega}=g,\end{cases}$$

la solución $u(x, t)$: $\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es la concentración de contaminación.

Esto es,

$$u_t=\nabla(k\bigtriangledown u)-\operatorname{div}(\mu v)+f(u)$$

En particular cuando $q=-k\frac{\partial C}{\partial x}$, donde q es el flujo y C es la masa, la razón de cambio de la masa es:

$$C_t=-DC_x(x-\triangle x,t)+DC_x(x+\triangle x,t)$$

esta conduce a la ecuación de difusión $C_t = DC_{xx}$ equivalente a $-\frac{\partial q}{\partial x}=\rho c\frac{\partial c}{\partial t}$, en [Ga] se encuentra que la solución básica es

$$c(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\quad .$$

Siguiendo un modelo aleatorio se obtiene la siguiente ecuación de reacción y transporte:

$$u_t+v\bigtriangledown_x u+\lambda(\nu)u=h\int T(v,v')u(t,x,v')dv'+\frac{1}{|v|}f(\widetilde{u})$$

con $\widetilde{u}(t,x)=\int_{\mathbb{V}}u(t,x,v)dv.$

2. Un Caso Singular en $\mathbb{R}$

Consideramos modelos del tipo advectivo no lineal y difusión no lineal singular por cuanto $\varepsilon\longrightarrow 0$, como el siguiente

$$\begin{cases}u_t=\varepsilon u_{xx}-(uw)_x & ,\ x\in\mathbb{R},t\geq 0\\ w=\int_x^{+\infty}u(y)dy-\int_{-\infty}^{x}u(y)dy\end{cases}$$

donde la solución $u(x, t)$ es una distribución de densidad y w es el campo de velocidades dada por la advección de los individuos. Si hacemos

$$M=\int_{-\infty}^{+\infty}u(y)dy\qquad\text{y}\qquad\nu=\int_{-\infty}^{x}u(y)dy$$

obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v_t = \varepsilon v_{xx} - v_x(M-2v) \\ v \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty; \ \nu \to M \text{ cuando } x \to +\infty \end{cases}$$

Cuya solución en estado de reposo es:

$$\varepsilon v_x = \frac{1}{2}\nu(M-\nu),$$

de lo cual se obtiene un estado de reposo v_0 dado por

$$v_0(x) = \frac{M}{2}\left[1+\tan\left(\frac{M}{4\varepsilon}(x-x_0)\right)\right]$$

para un valor inicial x_0; con correspondiente solución u_0 dado por

$$u_0(x) = \frac{M^2}{8\varepsilon}\sec h^2\left(\frac{M}{4\varepsilon}(x-x_0)\right).$$

Así que para $\varepsilon > 0$ es un problema con valor inicial en $L_p\ \mathbb{R}$ $(p = 1,2)$.

Si $\varepsilon = 0$, con $v(x,0) = \tilde{\nu}(0)$, obtenemos una solución

por el método de las características de la forma

$$\nu = \tilde{\nu}(s)$$

donde

$$0 = s - x + t(M - 2\tilde{\nu}(s)) \ ,$$

$\tilde{\nu}$ desarrolla una discontinuidad de salto (shock) cuando

$$t = \inf_{s\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2\frac{d\tilde{\nu}}{ds}(s)}\right\}$$

3. Caso General

En $X = H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, consideramos un operador sectorial $A : X \to X$ densamente definido en X; $B : X \to X$ un operador lineal autoadjunto; $f : X \to X$ una función lineal lipschiziana.

Entonces para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, existe $u(x,t)$ solución de (1) en $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ con valores propios distintos de $\mu_0 \neq 0$ en

$$S_\varnothing = \left\{z \in \mathbb{C} / \frac{\pi}{2} + \theta < \arg(z-\mu_0) < \frac{3\pi}{2} - \theta\right\}.$$

De

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(Bu)}{\partial x} = A(u) + f(u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

En particular, para $u_t + \nabla(Vu - D\nabla u) = f(u)$ en un intervalo $(t_0, t_0 + T)$, existe una solución del tipo

$u(x,t) = e^{\sigma t + ikx}$, g con $g \in X$

De cuya sustitución obtenemos el siguiente problema de autovalores para $f(u) \equiv 0$,

$$\sigma g + ikBg = Ag \tag{2}$$

u es la solución de la ecuación de evolución para k pequeño y $\sigma(k)$ ubicado tanto como sea posible, a la derecha en el plano complejo. En efecto, para obtener la solución asintótica de (2) usamos las expansiones

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 k + \sigma_2 k^2 + \dots & \in \mathbb{C} \\ g = g_0 + g_1 k + g_2 k^2 + \dots & \in X \end{cases} \tag{3}$$

sustituyendo en (1) obtenemos:

$$\begin{cases} Ag_0 - \sigma_0 f_0 = 0 & \text{en el orden } k^0; \\ Af_1(k) - \sigma_o f_1(k) = (\sigma_1 + iB) f_0(k) & \text{en el orden } k^1; \end{cases} \tag{4}$$

tenemos que $\sigma_0 = \mu_0$, es el autovalor de A y g_0 es la autofunción correspondiente.

Para el k_1–orden, asumimos la alternativa de Freedholm para la condición de solubilidad

$$< g_0^*, (\gamma_0 + iB) f_0 >= 0$$

y se obtiene

$$\begin{cases} w = i\gamma_1 \ , \ \gamma_1 = iw \ , \ w = \frac{< g_0^*,\, Bg_0 >}{< g_0^*,\, g_0 >} \ , \\ g_1 = i(A - \mu_0 I)^{-1} \cdot (B - wI) g_0 \end{cases} \tag{5}$$

donde la inversa $(A - \mu_0 I)^{-1}$ es restringida al complemento ortogonal del espacio generado por g_0.

De la misma manera para el orden k^2 obtenemos

$$\begin{cases} Ag_2 - \sigma_0 = \sigma_2 g_0 + (\sigma_1 + iB) f_1 \\ \sigma_2 = \frac{< g_0^*, (B-wI)(A-\mu_0 I)^{-1}(B-wI) g_0 >}{< g_0^*,\, g_0 >} = -D^2 \end{cases} \tag{6}$$

Entonces w es finito y existe una solución real $\widetilde{u}\,(x,\,t)$ de la siguiente ecuación unidimensional

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} - w^* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \mu_0 C \tag{7}$$

tal que

$$\|u(x,t) - \widetilde{u}(x,t) g_0\|_X \leq O\left(\frac{e^{\mu_0 t}}{t}\right),$$

si A es un operador autoadjunto, entonces D^* es finito.

En efecto

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{G(k)t+ikx} \cdot g(k) dk \tag{8}$$

donde $a(k)$ es alguna función compleja; además $(A - \mu_0 I)^{-1}|_{<g0>\perp}$ es negativamente definida (el espectro está sobre el eje real y a la izquierda de μ_0), y obtenemos:

$$D^* = \frac{- < (B - wI)\cdot g_0, (A-\mu_0 I)^{-1}\cdot(B-wI)\cdot g_0 >}{\|f_0\|^2} \tag{9}$$

Dado que $g_0 = g_0^*$, entonces D^* existe y es positivo.

4. Caso en $\mathbb{R}^2$

En [Gb] para el problema de reacción - difusión mezclante se tiene que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Bu) = Au + f(u) \\ u \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+, X)\ ,\ \Omega \text{ abierto de } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{10}$$

donde X es un espacio de Hilbert, $A : D(A) \subset X \to X$ un operador sectorial; B: $X \to X$ un operador lineal autoadjunto; $f : X \to X$ dado por $f(u) = u(u{-}a)\,(u{-}1)$ con $0 < a < 1$.

En particular para

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

con $b_1 \neq b_2$, más exactamente $b_1 = 2 + b_2$ para coordenadas viajeras $z = x - (c + b^1 - 1)$, con $U' = \frac{\partial U}{\partial z}$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{pmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & -1-c \end{pmatrix} U' = AU + f(U)$$

$U = (U_1, U2)^T$, $f(U) = (F(U_1),0)^T$, esto es:

$$\begin{cases} (1-c)U_1' = a_2 U_2 - a_1 U_2 + F(U_1) \\ (-1-c)U_2' = a_1 U_1 - a_2 U_2 \end{cases} \tag{11}$$

Diferenciando en la primera ecuación y reemplazando en la segunda obtenemos:

$$0 = \frac{1}{a_2}(1-c^2)U_1'' + U_1'\left(\frac{c(a_1+a_2)+a_1-a_2}{a_2} - \frac{1}{a_2}(1+c)F_U(U_1)\right) + F(U_1) \tag{12}$$

Una ecuación diferencial obtenida por cambio de variable del tipo onda viajera $z = x - \eta t$ para algún η es sustituida en el problema de reacción - difusión escalar

$w_t = \omega_{xx} + F(\omega)$, con $F(\omega) = \omega(\omega - 1)(\omega - a)$ con $0 < a < 1$.

La ecuación diferencial ordinaria (12) tiene este tipo de solución para $\eta = \sqrt{2}(1/2 - a)$ [Ga] y esta es dada por

$$U_1(z) = \varnothing_1(z) = \left(1 + \exp\left(-z/\sqrt{\theta}\right)\right)^{-1}, \ z = x - \eta t \tag{13}$$

Solución que satisface $\varnothing_1 \to 0$ cuando $z \to -\infty$ y $\varnothing_1 \to 1$ cuando $z \to +\infty$.

En (12), si hacemos $a_1 = a_2$ con $y = \frac{z}{\sqrt{2(1-c^2)}}$ obtenemos

$$0 = U_1'' + U_1' \frac{(2c - 2(1+c)F_U(U_1))}{\sqrt{2(1-c^2)}} + F(U_1) \tag{14}$$

Teorema 1. *$U_{1z}(z)$ es una solución estable del linealizado de (14) en torno de $U_1(z)$ en $L_2(\mathbb{R})$.*

Prueba. El linealizado alrededor de $\varnothing_1(z)$ para (14) es

$$-AU_1 = U_{1zz} + U_{1z}\frac{[2c - 2(1+c)F_U(\varnothing_1)]}{\sqrt{2(1-c^2)}} + F_U(\varnothing_1)U_1\,; \tag{15}$$

además U_{1z} es solución de $-AU_1 + \lambda U_1 = 0$ para $\lambda = 0$.

Al variar λ en el plano complejo puede existir un corte con el eje imaginario en (ik), así que el polinomio característico asociado con (15) es:

$$\lambda = -k^2 + ik\frac{[2c-2(1+c)F'(\varnothing_1)]}{\sqrt{2(1-c^2)}} + F'(\varnothing_1) \quad (16)$$

de donde se deduce:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda) = -k^2 + F'(\varnothing_1) \\ \mathrm{Imag}(\lambda) = k\left[\frac{2c-2(1+c)F'(\varnothing_1)}{\sqrt{2(1-c^2)}}\right] \end{cases}; \quad (17)$$

esto es,

$$\mathrm{Re}(\lambda) = \left[\frac{\mathrm{Imag}\sqrt{2(1-c^2)}}{2c-2(1+c)F'(\varnothing_1)}\right]^2 + F'(\varnothing_1) \quad (18)$$

Así que el espectro esencial de A está a la derecha de la parábola (18); más específicamente derivando $f(\varnothing_1) = \varnothing_1(\varnothing_1 - a)(\varnothing_1 - 1)$, cuando $0 < a < 1$; y teniendo en cuenta que $\varnothing_1 \to 0$ cuando $z \to -\infty$, entonces $f'(\varnothing_1) \to a$; también $f'(\varnothing_1) \to 1 - a$ porque $\varnothing_1 \to 1$ cuando $z \to +\infty$.

Así dicho espectro esencial para las ondas viajeras en el infinito está a la derecha del mín $\{a, 1 - a\}$.

Ahora consideremos los auto valores λ de A, resulta que si $\mathrm{Re}(\lambda) \le 0$ para alguna solución ν del problema de valores propios

$$-A\nu + \lambda\nu = \nu'' + \nu'\left[\frac{2c-2(1+c)F'(\varnothing_1)}{\sqrt{2(1-c^2)}}\right] \quad (19)$$

$$+F'(\varnothing_1)\nu + \lambda\nu\,, \qquad \text{con } 0 < c < 1\,;$$

de (13) tenemos que $\nu \in L^2(\mathbb{R})$ decae hacia cero al menos como $O(e^{-cz})$ y por ello

$$y(z) = \nu(z)\cdot e^{\frac{c}{2}z} \quad (20)$$

decae exponencialmente cuando $|z| \to \infty$.

Observamos que $y(z)$ satisface el siguiente problema autoadjunto,

$$y_{zz} + \left(f'(\varnothing_1) + \lambda - \frac{c^2}{4}\right)y = 0\ ,\ z \in \mathbb{R}$$

con $y \to 0$ cuando $|z| \to 0$. Así que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

5. Modelos con Velocidad de Salto Aleatorio

Surge en poblaciones o distribuciones de partículas cuyos saltos son controlados por procesos de Poisson; en estos casos aproximamos la difusión mediante la siguiente ecuación de transporte:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,\nu,t) + \nu\cdot\nabla P(x,\nu,t) = \quad (21)$$
$$-\lambda P(x,v,t) + \lambda\int_V T(\nu,v')P(x,v',\nu)dv'$$

donde $P(x,v,t)$ es densidad de partículas en $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $v\in V\,\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $t \ge 0$ es la velocidad del movimiento; λ es la razón de retorno cambio de velocidad ($\frac{1}{\lambda}$ la distancia media entre saltos).

$T(v, v')$ es la probabilidad de que la velocidad de salto cambie de ν' para ν, para ello se exige que $\int_V T(v, v')\, dv = 1$.

Sea K un cono de funciones en $L^2(V)$, y para cada (x, t) definimos el operador

$$\tau P = \int_V T(v,\nu')P(x,\nu',t)d\nu'$$
con adjunto
$$\tau^* P = \int_V T(v',\nu)P(x,v',t)dv'$$

Si damos la hipótesis de que

$$u_0(v)\varnothing(v') \le T(v',v) \le u_0(\nu)\psi(\nu')$$

Para algunos $\varnothing$, $\psi \in K$ no nulos en un conjunto de medida cero, $u_0 \neq 0$; además suponemos que $\|\tau\|_{<1>^\perp} < 1$ con $<1>^\perp$ es el subespacio igual al complemento ortogonal de $<1>$ en $L^2(V)$.

Entonces $\tau, \tau^*: K \to K$, dado que 1 es el único autovalor simple positivo correspondiente a u_0.

Llamamos al operador $\mathfrak{L}\ P(v) = -\lambda P(v) + \lambda\tau P(v)$, así éste operador se puede factorizar como

$$\mathfrak{L} = G.H$$

con
$$\begin{cases} Hw = \lambda(\nu)w(v)\,, \\ G(y(v)) = -y(\nu) + \int_V T(\nu,v')y(v')dv'\,, \end{cases}$$

Además cero es el único $\mathfrak{L}$ autovalor positivo de $u_0(v) \equiv 1$; por (21) los otros autovalores μ son tales que $-2\lambda < \mathrm{Re}\mu < 0$. Si $\lambda(v)$ es nula en un punto de Ω, la inversa de H es no acotada.

El Kernel de $\mathfrak{L}$, $\mathcal{N}(\mathfrak{L})$, contiene un conjunto ortogonal completo si $\mathfrak{L}$ es simétrico, y obtenemos $L^2(V) = <1>^{\perp} \oplus <1>$; por ello para $\mu_i \neq 0$, $i \geq 2$, tenemos proyecciones

$$P_i : V \longrightarrow V$$

las cuales descomponen ortogonalmente el operador $\mathfrak{L}$ así:

$$\mathfrak{L} = \sum_{j=2}^{\infty} \mu_j P_j$$

Para el caso particular para el cual $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, $P(x,v,t) \in \mathbb{R}$ en (21), podemos solucionar la ecuación (21) usando transformadas de Fourier del tipo

$$P(x,v,t) = e^{\sigma(k)t+Lkx} \cdot g(v) \ \text{ con } g \in L_2(\mathbb{R}) \quad (22)$$

Reemplazamos (22) en (21) como en (2) - (9), garantizamos la existencia de cantidades finitas v^* y D^* en

$$\sigma\ (k) = -ikv^* - D^*k^2 + \ldots,$$

con

$$\nu^* = \frac{\int_{V\,\text{mín}}^{V\,\text{máx}} V \frac{T(v)}{\curlywedge(v)} d\widetilde{\nu}}{\int_{V\,\text{mín}}^{V\,\text{máx}} \frac{T(v)}{\curlywedge(v)} d\widetilde{\nu}} \ , \ D^* = \frac{\int_{V\,\text{mín}}^{V\,\text{máx}} (V^* - V) \frac{T(v)}{\curlywedge(v)} d\widetilde{\nu}}{\int_{V\,\text{mín}}^{V\,\text{máx}} \frac{T(v)}{\curlywedge(v)} d\widetilde{\nu}}$$

y obtenemos una solución $\widetilde{P}$ de la siguiente ecuación de difusión - advectiva:

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial x^2} - V^* \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x} \qquad (23)$$

con $|P(x,v,t) - \widetilde{P}(x,\nu,t) g_0(v)| < O(1/t)$.

En el caso unidimensional en (21), adimensionamos las variables siguientes

$$u = \frac{v}{s} \ , \ \xi = \frac{x}{L} \ , \ \tau = \frac{t}{\sigma}$$

con s la velocidad característica. Haciendo $\frac{L}{s} = O(1/\varepsilon)$ y $\frac{L^2\lambda}{s^2} = O(1/\varepsilon^2)$ *tenemos que (21) se transforma en (24),*

$$\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \varepsilon v \bigtriangledown P = -\lambda P + \lambda \int_V T(\nu,v') P(\xi,v',\tau) dv'$$

con $\tau = \varepsilon^2 t$, $\xi = \varepsilon \frac{x}{s}$, $v \in V$, $\xi \in \mathbb{R}$ con $\widetilde{\Omega} = \frac{\varepsilon\Omega}{s}$.

Asumimos que (24) tiene soluciones expandidas en términos de ε,

$$P(\xi,v,\tau) = \Sigma_{i=0}^{k} P_i(\xi,v,\tau)\varepsilon^i + \varepsilon^{k+1} P_{k+1}(\xi,v,\tau)$$

obtenemos un sistema según el orden de ε, así:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &: \mathfrak{L}P_0 = -\curlywedge P_0 + \int_V T(v,v') P_0(\xi,v',\tau) dv' = 0 \\ \varepsilon^1 &: \mathfrak{L}P_1 = v \cdot \bigtriangledown P_0 \\ \varepsilon^2 &: \mathfrak{L}P_2 = \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + v \cdot \bigtriangledown P_1 \\ \varepsilon^i &: \mathfrak{L}P_i = \frac{\partial P_{i-2}}{\partial \tau} + v \cdot \bigtriangledown P_{i-1} \ \text{ para } 3 \leq i \leq k+1 \end{aligned}$$

usando condiciones de solubilidad para las distintas potencias ε^j obtenemos que

$$\mathfrak{I} = \left(\mathfrak{L}\big|_{<1>^{\perp}}\right)^{-1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j}{\mu_j}$$

porque $\begin{cases} P_1 = \mathfrak{L}(v \cdot \overline{v} P_0) \\ \int_V \left[\frac{\partial P_0}{\partial \tau} + v \cdot \overline{v}(\mathfrak{I}(v \cdot \bigtriangledown P_0))\right] dv = 0, \end{cases}$

esto es,

$$\frac{\partial P_0}{\partial \tau} - \bigtriangledown(D\, \overline{v} P_0) = 0 \text{ con } D = -\frac{1}{|V|}\int_V v \mathfrak{I} \nu dv.$$

En sistemas dinámicos sobre dinámica de poblaciones $P(x; t)$, el modelo (21) se puede generalizar así:

$$P_t + s \bigtriangledown_x P + \lambda P = \lambda \int_V T(v,v') P(t,x,v') dP' + \frac{1}{|v|}\left\{ m(\widetilde{P})\widetilde{P} - g(\widetilde{P})\widetilde{P} \right\} \qquad (25)$$

con $\widetilde{P}(t,x) = \int_V P(t,x,v) dv$.

Si hacemos $f(P) = m(P)P - g(P)P$, vemos que el sistema (25) acopla una ley de conservación con el flujo del gradiente:

$$\begin{cases} P_t + d_Q = f(P) \\ \tau Q_t + D\mathrm{grad}(Q) - h(P)Q = 0 \ ; \end{cases}$$

un caso fácil de resolver es el caso límite $\tau = 0$.

Ejemplo 1. Sea $V = sS^{n-1}, T(\nu, \nu') = \frac{1}{|V|}$ con λ constante; se puede encontrar que $\Im$ es $-\lambda^{-1}$.

Ejemplo 2. El sistema parabólico de Patlak - Keller - Segel, P.K.S en [K-Se] es dado por

$$\begin{cases} u_t = \nabla(D \nabla u - \chi(S) \nabla Su) \\ \theta S_t = B \triangle S + f(S,u) \end{cases}$$

y describe la propagación poblacional donde: $u(x, t)$ es la densidad poblacional; $S(x, t)$ son los efectos externos; el signo $\chi(S) \gtreqless 0$ depende de la especie; $f(S, u)$ es la propagación espacial. Como $\theta \geq 0$ se observa que u y S se desarrollan en diferentes escalas temporales.

En [Hi-St] se da la siguiente alternativa unidimensional hiperbólica a partir de caminos aleatorios, donde $u^{\pm}, \lambda^{\pm}$ se refieren a movimientos hacia la derecha o hacia la izquierda:

$$\begin{cases} u_t^+ + (\tau(s)u^+)_x = -\lambda^+(S,S_x)u^+ + \lambda^-(S,S_x)u^- \\ u_t^- - (\tau(s)u^-)_x = \lambda^+(S,S_x)u^+ - \lambda^-(S,S_x)u^- \\ \theta S_t = BS_{xx} + f(S, u^+ + u^-); \end{cases}$$

vía el cambio de variables $u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t)$, $j = v(u^+ - u^-)$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial t} + 2\lambda j = -V^2 \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

con condiciones iniciales $u(x_0) = u_0(x)$, $j(x_0) = j0(x)$; y de este último sistema se obtiene la ecuación del telégrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ .$$

Conclusiones

1. Encontramos que las soluciones del tipo de ondas viajeras para el primer modelo son estables, análogo a lo que sucede en la ecuación de Reacción-Dispersión No-Lineal.

2. Para el segundo modelo, el cual proviene de difusión aleatoria, también tiene una solución estable asociado al valor propio simple $u_0 = 0$.

3. En ambos casos resulta muy útil el método espectral de la transformada de Fourier.

4. Los dos modelos pueden provenir de: los procesos de crecimiento poblacional, dispersión de procesos ambientales, propagación de enfermedades, entre otros. Estos modelos corresponde a procesos interdisciplinares.

Referencias

[Ga] Grindrod, Peter. *Patterns and Waves: The Theory and Aplications of Reaction - Diffusion Equations*. Oxford: OUP, 1995.

[G-I] Grindrod, Peter, and Michael Impey. "Channeling and Fickian Dispersion in Fractals Simulated Porous Media". *Water Resources Research* Vol: 29 No. 12 (1993): 4077-4089.

[Gb] Grindrod, Peter. "On Models of Dispersion at Macroscopic Scales". *Bath Institute for Complex Systems* preprint 15/06 (2006), http://www.bath.ac.uk/math-sci/bics/preprints/BICS06_15.pdf .

[He-O] Hellen, Thomas, and Hans G. Othmer. "The Diffusion Limit of Transport Equation Derive from Velocity-Jump Processes". *SIAM J. APPL. MATH.* Vol: 61 No 3 (2000): 751-775.

[Ha-Mu] Hadeler, Peter, and Johannes Muller. "Dynamical Systems and Population Dynamics". *Ergodic Theory Analysis and Efficient*

Simulation of Dynamical Systems, editado por Bernold Fiedler. Berlin: Springer, 2001.

[Ma] Madzvamuse, Anotida. “A Modified Backward Euler Scheme for Advection-Reaction-Diffusion Systems”. *Mathematical Modeling of Biological Systems* Volume I, Andreas Deutsch, Lutz Brusch, Helen Byrne, Gerda de Vries and Hanspeter Herzel (eds). Boston: Birkhuser, 2007, 191-197.

[K-Se] E.F. Keller and L.A. Segel. “Model for Chemotaxis”. *Journal of Theoretical Biology* Vol. 30 No. 3 (1971): 225-234.

[Hi-St] Hillen, Thomas, and A. Stevens. “Hyperbolic Models for Chemotaxis in 1-D”. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* Vol. 1 No. 3 (2000): 409-433.

[W-Je] H. Willianms, and O.E. Jeuseu. “Two-dimencional nolinear advection diffusion in a model of sunfactant spreading on a thiu liquid film”. IMA Journal of applied Mathematics, Vol. 66 No.1 (2001). pp. 55-88.