MATEMATICAS

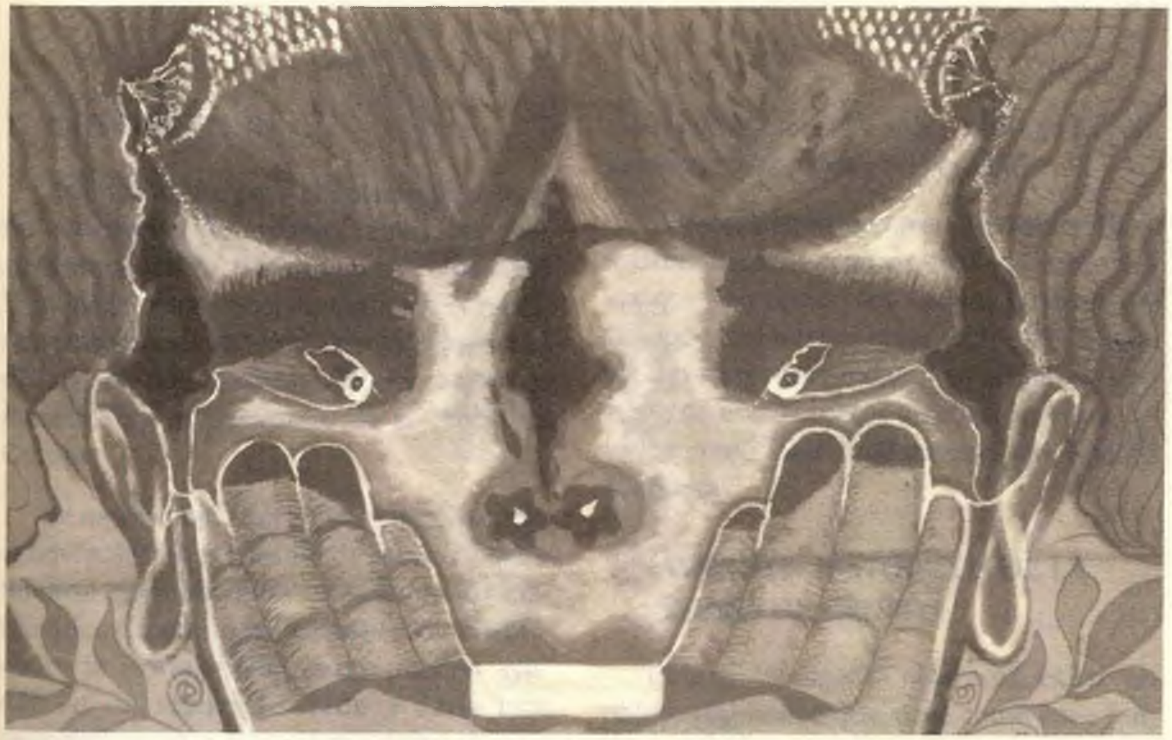


Ilustración: Morera C.

ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS

LUIS ARTURO POLANIA QUIZA
CARLOS ARTURO BOHÓRQUEZ SÁNCHEZ *

1. INTRODUCCIÓN

Es importante para el óptimo desempeño conceptual de algunos temas, conocer sus antecedentes, sus orígenes y sobre todo la manera como incursionaron en el mejoramiento de la vida; es así como la presente obra pretende rescatar algunos aspectos omitidos en el desarrollo de la Teoría de Grupos.

Se mencionan aquí algunos autores trascendentales en el estudio de grupos y la influencia que ejercieron estos sobre los matemáticos modernos; los aspectos históricos de la Teoría de Grupos nos pueden ayudar en un momento dado a darle una aplicabilidad concreta y a relacionar de una manera útil los grupos con otros campos de la ciencia diferentes a la matemática.

En muy pocas obras del Algebra abstracta se hace mención de los Grupos Cristalográficos, sin embargo, su importancia es eminente y en la medida en que se profundice más en este tema, encontraremos múltiples aplicaciones de la Cristalografía a otras ramas de la ciencia y sobre todo en lo concerniente a la física y a la química.

Pretendemos a través de este trabajo, ilustrar de manera muy sencilla la importancia que han tenido los Grupos a través del tiempo y así mismo crear expectativas que de alguna manera incentiven al lector al estudio de estos objetos algebraicos considerados como base fundamental del álgebra abstracta.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS

Dentro del álgebra abstracta, existe un objeto algebraico que sirve como base fundamental de dicha materia, este objeto recibe el nombre de Grupo, que junto con otros elementos (anillos, campos, espacios vectoriales, algebras lineales) constituyen los otros componentes básicos del álgebra moderna.

Los grupos, obedecen a una simple descripción formal relacionada con la operación con que estén definidos, sin embargo, conceptos como homomorfismos, isomorfismos, construcción cociente, etc., entran en este campo en una forma pura y reveladora.

Hacia finales del siglo XVII y comienzos del siglo XIX ya se estaba estudiando este objeto matemático llamado grupo; pero solo hacia finales del siglo XIX se logró in-

* Luis Arturo Polanía Quiza, es profesor del Programa de Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana.

Carlos Arturo Bohórquez, es estudiante del noveno semestre del Programa de Matemáticas y Física del mismo centro docente.

troducir la noción de grupo abstracto, que hasta ahora ha crecido en importancia y ha sido objeto de actual profundización en el campo de la matemática.

El estudio de los grupos se relaciona con la teoría de ecuaciones; originalmente, un grupo no era más que un conjunto de permutaciones tales que la combinación de dos permutaciones cualesquiera daba lugar a otra permutación del conjunto. Más adelante se generalizó esta definición al concepto de grupo abstracto que se definió como un conjunto, cuyos elementos no han de ser únicamente permutaciones, dotado de un procedimiento que permite combinar sus elementos de acuerdo con unas pocas leyes sencillas.

La teoría de los grupos abstractos desempeña un papel importante en la matemática y en las ciencias modernas. Los grupos aparecen en un sorprendente número de materias que aparentemente no están relacionadas entre sí. Se encuentran en la Cristalografía y en la mecánica cuántica, en la geometría y en la topología, en el análisis y en el álgebra, en la física, en la química y en la biología.

La Simetría, es uno de los conceptos intuitivos mas importantes en la matemática y en las ciencias; los grupos pueden describir la simetría; en realidad, muchos de los grupos que se encuentran en la matemática y en las ciencias son el resultado del estudio de la simetría, es esta la razón de la abundancia de los grupos.

Dentro del estudio de los grupos, es de mediana importancia el concepto de Grupoide, que profundiza en las ideas fundamentales de operación binaria, homomorfismos, isomorfismos, y el teorema de Cayley.

El concepto de grupo, es un concepto natural, entran en juego grupos de números reales y complejos, grupos de simetrías, grupos diedros, grupos de formaciones de Mobius, grupos de automorfismos de grupoides y cuerpos, grupos de matrices y el grupo lineal pleno.

La teoría general del álgebra (álgebra abstracta) centra su interés en las estructuras algebraicas (grupo, anillo, campo, etc.) mas que en la teoría de ecuaciones; esto se debe, entre otras razones a una teoría conocida como "La Teoría de Galois" que demuestra, basándose en resultados pertinentes a las estructuras algebraicas, que en general no existen métodos algebraicos para resolver ecuaciones de grado cinco o mayor; es decir que no existe ninguna fórmula de solución para dichas ecuaciones, que tal como en el caso de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuánticas, puede expresarse en términos de operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, extracción de raíces) con los coeficientes de la ecuación.

Lo que Galois demostró fue que "El problema de la solución de una ecuación polinómica es, por lo tanto, esencialmente un problema numérico"; así las cosas, debemos tener en cuenta que el presente siglo y el empleo de herramientas como la calculadora y el computador, reflejan directamente la importancia de nueva fundamentación de la matemática sobre la base de la aritmética.

Hacia 1800 con las investigaciones de Gauss, sobre las formas cuadráticas empieza a utilizarse el concepto de Ley de Composición Interna.

La noción de grupo aparece también en los trabajos sobre "Teoría de substituciones", desarrollo de las ideas de Lagrange, de Vandermonde y en los de Gauss, Abel Ruffini y Cauchy, del siglo XIX, sobre teorías de ecuaciones, teorías de números y transformaciones geométricas.

Los conceptos de producto de dos permutaciones de un conjugado finito fueron dados por Cauchy y Ruffini, así como algunos conceptos de transitividad, primitividad, elementos neutro.

Evaristo Galois considerado como el iniciador de la teoría, relacionó sus trabajos sobre ecuaciones algebraicas con los de grupo de permutaciones, en los cuales penetró profundamente en las propiedades generales de la teoría de grupos, es él quien define el concepto de subgrupo distinguido o normal y reconoce su importancia, y es también a Galois a quien se deben las primeras ideas sobre "Representación lineal de grupos", esto es prueba de que manejaba la noción de Isomorfismo entre dos estructuras de grupo. Galois además probó que una ecuación es soluble por radicales (o resoluble) solo si su grupo de Galois lo es (asoció a una ecuación polinomial un grupo de permutaciones).

Abel N. Henry, mostró que es posible hallar un polinomio de grado mayor o igual a cinco cuyo grupo de Galois no es soluble.

Ilustración: Efren Mosquera Villarreal

La Teoría de Grupos es aplicada por Arthur Cayley a la Teoría de los Cuaternios, William Hamilton en su libro "Traite des Substitutions" (1870), pone en relieve la importancia de la Teoría de Galois como unificadora de diversas ideas en matemáticas. Con los trabajos de Ernest Steinitz es donde entra esta teoría en su fase moderna (1910).

Dos discípulos de Jordán: Felix Klein y Marcos Sophus Lie, pusieron de manifiesto el poder unificador y sistematizador de la teoría.

Klein aplicó la Teoría de Grupos a la Geometría en su "Programa de Erlanger" en 1872, mediante grupos y subgrupos jerarquiza todas las geometrías. Mostró que el grupo de las rotaciones del icosaedro regular es isomorfo al grupo de Galois de la ecuación de quinto grado.

Klein estudió grupos discontinuos, Sophus Lie los grupos continuos de transformaciones, su clasificación y aplicaciones a ecuaciones diferenciables parciales.

De 1910 para acá, la Teoría de Grupos está ligada a casi todos los eminentes matemáticos de este siglo, por ejemplo: Respecto a los resultados de grupos abelianos finitos, estos son bastantes completos, sin embargo, 2 libros sobre grupos abelianos, Fuchs Abelian Groups, (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1958) y el libro de I. Kplansky, Infinite Abelian Groups (Ann Arbor, University of Michigan Press. 1954), muestran que la situación para grupos abelianos de orden finito no lo es, así como la teoría general de grupos abstractos, muestran que aún existen muchos problemas de enunciados sencillos, que están por resolver.

La teoría de grupos es hoy en día una de las ramas más activas de la matemática; en los últimos 20 años, la teoría ha tenido grandes avances, con los teoremas de clasificación respecto a grupos simples, y el descubrimiento de familias de grupos simples, y sobre todo, ha sido la cuestión de solubilidad de grupos de orden impar.

Sobre resultados de Philip Hall se ha hecho aplicaciones a los grupos solubles, a la teoría de grupos nilpotentes y contribuciones de Braver a la teoría de caracteres de grupos.

3. GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

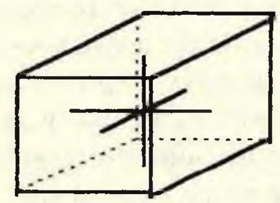
La Cristalografía es la ciencia que estudia la forma cristalina y la estructura, composición y propiedades físicas y químicas de los cristales. Uno de sus principales objetos de estudio es el estado sólido de las materias cuya forma es un cristal natural y que corresponden, por lo general, a un tipo de mineral.

En la actualidad, es una ciencia eminentemente sistemática, ya que las modernas técnicas de investigación cristaloquímicas y cristalofísicas han permitido identificar miles de estructuras las cuales están ordenadas en función de sistemas.

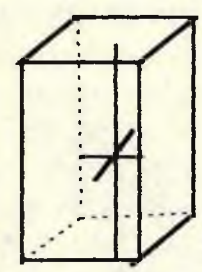
Las primeras hipótesis se iniciaron con los trabajos de Kepler en 1611 sobre cristales de nieve; luego Steno (1669) señaló la existencia de ángulos diedros que separan los cristales de una misma sustancia. Pero sólo en 1824 Jeeber propuso un sistema de ordenación periódica, con el que se sentaron las bases estructurales y teóricas de la cristalografía. Sobre estas bases aparecieron las clasificaciones de Brarais en 1850 y la de Fedorov y Schoenflies en 1890. Posteriormente, con el descubrimiento de los rayos X, se produjo una redefinición de los antiguos conceptos, ya que fue posible estudiar, dentro de una red periódica, a los átomos. A todo ello se deben sumar los trabajos sobre la difracción de neutrones en 1946, el reconocimiento estructural de una proteína en 1960 y muchos otros, que han permitido identificar en la actualidad más de 15.000 estructuras de sustancias.

Un Sistema Cristalino es un gran grupo en el que se reúnen algunas de las treinta y dos clases cristalinas en función de sus características de simetría comunes (ejes, planos y centro).

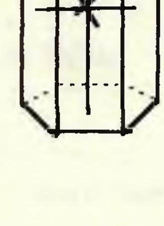
1. **GRUPO CÚBICO:** Tres ejes de igual longitud que se cruzan en ángulo recto; corresponden a este grupo los minerales como el Diamante, Pirita y Sal Gema.



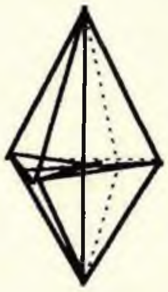
2. **GRUPO TETRAGONAL:** Dos ejes de igual longitud y un tercero más largo o mas corto. Todos se cortan en ángulo recto. Corresponden a este grupo la calcopirita, el Rubí y el Circón.



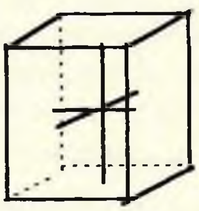
3. **GRUPO HEXAGONAL:** Tres ejes de igual longitud, situados en un mismo plano y se cortan en ángulos de 120°. El cuarto eje es mas largo o mas corto y es perpendicular a este plano. Corresponden a este grupo el Apatito, el Berilio y el Grafito.



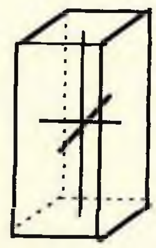
4. GRUPO TRIGONAL: Tres ejes de igual longitud, situados en un plano y que se cortan en ángulos de 120°. El cuarto eje es más largo o corto y es perpendicular a este plano.



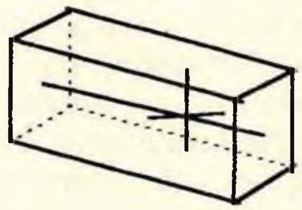
5. GRUPO ORTORROMBICO: Tres ejes de distinta longitud que se cortan en ángulo recto. Corresponden a este grupo la Barita, el Azufre y el Topacio.



6. GRUPO MONOCLÍNICO: Tres ejes de distinta longitud; dos de ellos se cortan en ángulo recto, el ángulo del tercero con estos dos pueden ser cualquiera, pero siempre distinto de 90°. Corresponden a este grupo el Yeso, Moscovita y Augita.



7. GRUPO TRICLINICO: Tres ejes de distinta longitud que se cortan en un ángulo distinto de 90°. Corresponden a este grupo la Albita, Anorita y Distena.



BIBLIOGRAFÍA

1 Acevedo, Myriam y Falk, Mary. XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. (2 al 6 de diciembre de 1996). *Una propuesta de trabajo para los cursos de álgebra moderna en la Licenciatura de Matemáticas.* U.N.C. Universidad Pedagógica Nacional - Universidad Distrital.

2 Campos, Myriam XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. (2 al 6 de diciembre de 1996). *Formas Cuadráticas y Grupos Clásicos.* U.N.C. - Universidad Pedagógica Nacional - Universidad Distrital.

3 Caicedo, Francisco. *Introducción a la Teoría de Grupos.* Bogotá. (U.N.C.), 1977.

4 Herstein I.N. *Algebra moderna.* Biblioteca de Matemática Superior. De. Trillas. México, 1979 p. 37 y 38.

5 *Gran enciclopedia ilustrada Círculo.* De círculo de Lectores. Barcelona, España, 1984. Volumen 4 p. 1038, Volumen 11 p. 3730.